Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 6

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, absolut konvergent, oder divergent sind:

(a) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$

(b) $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

(c) $a_n = \frac{(-17)^n}{n!}$

Lösung. (a) Eine notwendige Bedingung zur Konvergenz ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ konvergiert diese Reihe also nicht.

(b) Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenz-Kriterium. Die Reihe konvergiert nicht absolut, den sonst würde wegen

$$|a_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n}$$

und dem Majoranten-Kriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ absolut konvergieren.

(c) Wegen

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{17^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{17^n}{n!}} = \frac{17}{n+1} \to 0$$

folgt mit dem Quotienten-Kriterium, daß die Reihe absolut konvergiert.

Aufgabe 2

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + 5}$ absolut?

Lösung. Wir setzen $c_n := \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + 5}$. Dann gilt

$$c_n = \frac{n^2 - 4n}{3n^4 + 5} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \cdot z_n \quad \text{mit} \quad z_n := \frac{1 - \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n^4}}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| < 1$ für alle $n \geq N$. Also ist $|c_n| = \frac{1}{n^2} \cdot |z_n| < \frac{1}{n^2}$ für $n \geq N$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach dem Majoranten-Kriterium, daß auch $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert. Somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut.

Aufgabe 3

(a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

absolut konvergiert.

(b) Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge, so daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|a_n a_{n+1}|}$$

konvergiert. Stimmt es, daß dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert?

Lösung. (a) Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| \le \frac{1}{2}$ für $n \ge N$. Für diese n gilt somit

$$\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| \le \frac{|a_n|}{1-\frac{1}{2}} = 2|a_n|\,.$$

Nach dem Majoranten-Kriterium konvergiert die Reihe also absolut.

(b) Diese Behauptung stimmt nicht. Ein Gegenbeispiel ist die Reihe mit $a_n = 1$ für ungerade n und $a_n = 0$ für gerade n.