Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11.11.2009

5. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T5.1)

In dieser Aufgabe konstruieren wir die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Sei X die Menge aller Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ definieren wir

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Longleftrightarrow \quad (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(ii) Sei $\mathbb{R} := X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim, \quad [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim.$$

Weiter definieren wir "$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ist positiv" durch

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \geq n)(x_m > 2^{-k}).$$

Zeigen Sie, dass $+$, $\cdot$ und $>$ wohl-definiert sind.

(iii) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit $+$, $\cdot$ und $>$ ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper ist.

Diese Aufgabe ist recht umfangreich und muss nicht vollständig bearbeitet werden. Am wichtigsten ist es, zu zeigen, dass das Vollständigkeits-Axiom erfüllt ist.

Lösung.

(i) Es ist klar, dass $\sim$ reflexiv und symmetrisch ist. Wir zeigen, dass die Relation transitiv ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$|x_n - z_n| = |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|,$$

und da $(x_n - y_n) \to 0$ und $(y_n - z_n) \to 0$, folgt $(x_n - z_n) \to 0$, d.h., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Wir zeigen zuerst, dass Addition und Multiplikation nicht von den Repräsentanten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$, bzw. $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ abhängen. Sei $x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathbb{R}$ und $y = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathbb{R}$, und sei $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in y$. Dann gilt $(x_n - x'_n) \to 0$ und $(y_n - y'_n) \to 0$. Wir müssen zeigen, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n + y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n \cdot y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n + y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, folgt aus

$$|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| = |(x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|.$$

Um zu zeigen, dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n \cdot y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, bemerken wir zuerst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide beschränkt sind, da Cauchy-Folgen beschränkt sind. Also gibt es $M \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| \leq M$ und $|y_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jetzt folgt die Aussage aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x'_n \cdot y'_n| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y'_n + x_n \cdot y'_n - x'_n \cdot y'_n| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - y'_n| + |y'_n| \cdot |x_n - x'_n| \\ &\leq M \cdot (|y_n - y'_n| + |x_n - x'_n|). \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass $>$ wohl-definiert ist. Sei $x = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathbb{R}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in x$ und sei $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \geq n)(x_m > 2^{-k}).$$

Da $(x_n - x'_n) \to 0$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x'_n| < 2^{-k-1}$ für alle $n \geq N$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $m \geq \max(n, N)$ mit $x_m > 2^{-k}$. Dann gilt

$$x'_m = x_m + (x'_m - x_m) > 2^{-k} - 2^{-k-1} = 2^{-k-1}.$$

Also gilt

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \geq n)(x'_m > 2^{-k}).$$

(iii) Wir zeigen, dass das Vollständigkeits-Axiom erfüllt ist. (Es ist einfacher, zu zeigen, dass die Axiome (A.1)–(A.4), (M.1)–(M.4), (D), (O.1)–(O.3) und das Archimedische Axiom erfüllt sind.)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und für $k \in \mathbb{N}$ sei $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in a_k$. (Hier ist das k in x_n^k kein Exponent, sondern einfach ein oberer Index.) Wir müssen zeigen, dass es eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, wobei $a := [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$.

Wir bemerken zunächst, dass es, falls $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ gilt, $k \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $y_n > 2^{-k}$ gilt für alle $n \geq N$. Sei nämlich $k' \in \mathbb{N}$ so dass

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \geq n)(y_m > 2^{-k'}),$$

und sei $N' \in \mathbb{N}$ so dass $|y_n - y_m| < 2^{-k'-1}$ für $m, n \geq N'$. Sei jetzt $N \geq N'$ so dass $y_N > 2^{-k'}$. Dann gilt für $n \geq N$

$$y_n = y_N + (y_n - y_N) > 2^{-k'} - 2^{-k'-1} = 2^{-k'-1}.$$

Jetzt konstruieren wir die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_i^0 - x_j^0| < 1$ gilt für alle $i, j \geq N_0$. Wir setzen $x_0 := x_{N_0}^0$. Wir nehmen jetzt an, dass x_k und N_k schon definiert sind. Da $(x_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es $N_{k+1} \geq N_k$, so dass $|x_i^{k+1} - x_j^{k+1}| < 2^{-k-1}$ gilt für alle $i, j \geq N_{k+1}$. Wir setzen $x_{k+1} := x_{N_{k+1}}^{k+1}$.

Wir müssen zuerst zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $l \in \mathbb{N}$ mit $2^{-l+2} < \varepsilon$. Da $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i, j \geq M$ gilt $|a_i - a_j| < 2^{-l}$. Sei $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq i$ und $i \geq \max(M, l)$. Da

$$[(2^{-l} - (x_n^i - x_n^j))_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$$

und

$$[(2^{-l} - (x_n^j - x_n^i))_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim,$$

gibt es $M', M'' \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq M'$ gilt

$$x_n^i - x_n^j < 2^{-l}$$

und für $n \geq M''$ gilt

$$x_n^j - x_n^i < 2^{-l}.$$

Für $L := \max(M', M'', N_j)$ gilt also $|x_L^i - x_L^j| < 2^{-l}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} |x_i - x_j| &= |x_{N_i}^i - x_{N_j}^j| \\ &\leq |x_{N_i}^i - x_L^i| + |x_L^i - x_L^j| + |x_L^j - x_{N_j}^j| \\ &< 2^{-i} + 2^{-l} + 2^{-j} < 2^{-l+2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Wir zeigen jetzt, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, wobei $a := [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$. Es reicht, zu zeigen, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $i \geq K$ gilt $|a_i - a| < 2^{-k}$, also

$$[(2^{-k} - (x_n^i - x_n))_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$$

und

$$[(2^{-k} - (x_n - x_n^i))_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim.$$

Also ist es genug, wenn wir zeigen, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $i \geq K$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $n \geq n_i$ gilt

$$|x_n - x_n^i| < 2^{-k-1}.$$

Für $i, j, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x_n^i| &= |x_{N_n}^n - x_n^i| \\ &\leq |x_{N_n}^n - x_j^n| + |x_j^n - x_j^i| + |x_j^i - x_n^i|. \end{aligned}$$

Wenn $j \geq N_n$ gilt $|x_{N_n}^n - x_j^n| < 2^{-n}$, und wenn $j, n \geq N_i$ gilt $|x_j^i - x_n^i| < 2^{-i}$. Sei $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass für $n, i \geq M$ und $j \geq \max(N_n, N_i)$ gilt $|x_j^n - x_j^i| < 2^{-k-3}$. Wir

setzen $K := \max(k+3, M)$, und für $i \geq K$ setzen wir $n_i := \max(i, N_i)$. Für $n \geq n_i$ setzen wir $j \geq \max(N_n, N_i)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x_n^i| &= |x_{N_n}^n - x_j^n| + |x_j^n - x_j^i| + |x_j^i - x_n^i| \\ &< 2^{-n} + 2^{-k-3} + 2^{-i} \\ &< 2^{-k-1}. \end{aligned}$$

■