Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 4

Aufgabe 1

Mit jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziieren wir die Folge

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

der *arithmetischen Mittel.*

(a) Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Zeigen Sie, daß dann auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \,.$$

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N$$

gilt. Wir wählen einen Index $M > N$, so daß für alle $n \geq M$ gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}|a_i - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Für $n \geq M$ folgt

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}|a_i - a| + \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n}|a_i - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n-N}{n} \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(b) Finden Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die dazugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösung. Wir setzen $a_n := (-1)^n$. Diese Folge konvergiert nicht. Andererseits ist

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n\,, \\ -\frac{1}{n} & \text{für ungerade } n\,. \end{cases}$$

Also konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Aufgabe 2

Auf dem letzten Tutoriumsblatt haben wir den Begriff eines metrischen Raumes (X, d) eingeführt. Wir erinnern daran, daß eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt. Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
&d(x,y) \geq 0\,,\\
&d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y\,,\\
&d(x,y) = d(y,x)\,,\\
&d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\,.
\end{aligned}$$

(a) Sei X eine nichtleere Menge und $d_1, \dots, d_n$ Metriken auf X. Zeigen Sie, daß auch

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x,y)}{1 + d_i(x,y)}$$

eine Metrik auf X ist.

(b) Eine Teilmenge $D \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist *dicht,* wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $z \in D$ gibt, mit

$$d(x,z) \leq \varepsilon\,.$$

Zeigen Sie, daß eine Menge $D \subseteq X$ genau dann dicht in X ist, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, deren Elemente alle in D liegen.

Lösung. (a) Die ersten drei Axiome gelten offensichtlich. Wir weisen das letzte Axiom (die Dreiecksungleichung) nach. Zunächst merken wir an, daß für positive reelle Zahlen a, b gilt:

$$a \leq b \quad \text{gdw} \quad a + ab \leq b + ab \quad \text{gdw} \quad \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}\,. \tag{$*$}$$

Sei $1 \leq i \leq n$ und seien $x, y, z \in X$. Nach $(*)$ und der Dreiecksungleichung für d_i gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d_i(x,z)}{1 + d_i(x,z)} &\leq \frac{d_i(x,y) + d_i(y,z)}{1 + d_i(x,y) + d_i(y,z)}\\
&= \frac{d_i(x,y)}{1 + d_i(x,y) + d_i(y,z)} + \frac{d_i(y,z)}{1 + d_i(x,y) + d_i(y,z)}\\
&\leq \frac{d_i(x,y)}{1 + d_i(x,y)} + \frac{d_i(y,z)}{1 + d_i(y,z)}\,.
\end{aligned}$$

Summieren wir diese n Ungleichungen auf, so erhalten wir

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\,.$$

(b) $(\Rightarrow)$ Angenommen, D ist dicht in X. Sei $x \in X$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, finden wir einen Punkt $x_n \in D$ mit

$$d(x, x_n) \leq \tfrac{1}{n}\,.$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

$(\Leftarrow)$ Umgekehrt nehmen wir an, daß es zu jedem $x \in X$ eine solche Folge gibt. Um zu zeigen, daß D dicht ist, betrachten wir ein beliebiges $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert x. Also existiert ein Index N, so daß

$$d(x, x_n) \leq \varepsilon\,, \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Insbesondere ist $z := x_N \in D$ ein Punkt mit $d(x,z) \leq \varepsilon$.