Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28.10.2009

3. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

Metrische Räume

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf X, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0$ gilt g.d.w. $x = y$. (Die Metrik ist *positiv definit*.)

(ii) $\forall x, y \in X\,(d(x, y) = d(y, x))$. (*Symmetrie*.)

(iii) $\forall x, y, z \in X\,(d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z))$. (*Dreiecksungleichung*.)

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*, wenn d eine Metrik auf X ist. Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Metrik benutzt wird, bezeichnen wir auch X als einen metrischen Raum.

(T3.1)

(a) Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum ist. Die Metrik d heißt die *natürliche Metrik*.

(b) Zeigen Sie:

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, dann ist die Funktion $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$, die durch $d_Y(x, y) = d(x, y)$ für $(x, y) \in Y \times Y$ definiert ist, eine Metrik auf Y.

(Der metrische Raum (Y, d_Y) heißt *metrischer Teilraum* von (X, d). Wir sagen, d_Y ist die von d auf Y *induzierte Metrik*.)

(c) Sei X eine beliebige Menge, und sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Die Metrik d nennt man die *diskrete Metrik* auf X, und (X, d) ist ein *diskreter metrischer Raum*.

(d) Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{d}(x, y) := \min(1, d(x, y)).$$

Zeigen Sie, dass $(X, \tilde{d})$ ein metrischer Raum ist. Wir sagen, dass die Metrik $\tilde{d}$ durch *Trunkierung* aus d hervorgeht.

($\star$) Sei $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Für $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $f \neq g$ setzen wir

$$m(f, g) := \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}.$$

Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$,

$$d(f, g) := \begin{cases} 0 & \text{falls } f = g, \\ 2^{-m(f,g)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiert. Der metrische Raum $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ heißt *Baire-Raum*.

Lösung.

(a) Wir überprüfen, dass die Bedingungen (i), (ii), (iii) gelten:

(i): Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $d(x, y) = |x - y| \geq 0$, und wir haben

$$d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; |x - y| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

(ii): Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.

(iii): Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

(b) Wir überprüfen dass die Bedingungen (i), (ii), (iii) gelten:

(i): Für $x, y \in Y$ gilt $d_Y(x, y) = d(x, y) \geq 0$, und wir haben

$$d_Y(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

(ii): Für $x, y \in Y$ gilt $d_Y(x, y) = d(x, y) = d(y, x) = d_Y(y, x)$.

(iii): Für $x, y, z \in Y$ gilt

$$d_Y(x, z) = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d_Y(x, y) + d_Y(y, z).$$

(c) Die Bedingungen (i) und (ii) gelten trivialerweise. Wir überprüfen (iii). Wir unterscheiden zwei Fälle:

Wenn $x = z$, gilt $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Wenn $x \neq z$, gilt $x \neq y$ oder $z \neq y$, und wir haben

$$d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z).$$

(d) Wir brauchen nur zu überprüfen, dass die Dreiecksungleichung gilt, da es klar ist, dass positive Definitheit und Symmetrie gelten. Sei $x, y, z \in X$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Wenn $d(x,y) < 1$ und $d(y,z) < 1$, dann

$$\tilde{d}(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z).$$

Wenn $d(x,y) \geq 1$ oder $d(y,z) \geq 1$, dann

$$\tilde{d}(x,z) \leq 1 \leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z).$$

($\star$) Wir brauchen nur zu überprüfen, dass die Dreiecksungleichung gilt, da es klar ist, dass positive Definitheit und Symmetrie gelten. Sei $f, g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wir nehmen O.B.d.A. an, dass $f \neq g$, $f \neq h$, und $g \neq h$, da die Dreiecksungleichung sonst trivialerweise erfüllt ist. Also sind $m(f,g)$, $m(f,h)$ und $m(g,h)$ wohldefiniert.

Wir setzen $m := \min(m(f,g), m(g,h))$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ haben wir $f(n) = g(n) = h(n)$, also $m(f,h) \geq m$. Es folgt

$$d(f,h) = 2^{-m(f,h)} \leq 2^{-m} \leq 2^{-m} + 2^{-\max(m(f,g),m(g,h))} = d(f,g) + d(g,h).$$

■

(T3.2)

Sei X eine Menge. Eine *Folge* in X ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$, oder, allgemeiner, eine Funktion $f : \{k \in \mathbb{Z} : k \geq k_0\} \to X$, für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Folge $f : \mathbb{N} \to X$ mit $f(n) = x_n$.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, und $z \in X$. Wir sagen, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* z falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\ (d(x_n, z) < \varepsilon)\,.$$

(a) In der Vorlesung haben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen gegen eine reelle Zahl kennengelernt. Zeigen Sie, dass diese mit der oben gegebenen Definition mit $X = \mathbb{R}$ und der natürlichen Metrik d übereinstimmt.

(b) Sei X eine Menge, und sei d die diskrete Metrik auf X. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, und sei $z \in X$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert g.d.w.

$$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, (x_n = z).$$

Lösung.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $z \in \mathbb{R}$. Mit $d =$ die natürliche Metrik haben wir

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\ (|x_n - z| < \varepsilon)$$
$$\iff$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\ (d(x_n, z) < \varepsilon)\,.$$

(b) Wenn $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, (x_n = z)$, dann

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\ (d(x_n, z) < \varepsilon)\,.$$

Wir nehmen nun an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq N\, (d(x_n, z) < 1)\,.$$

Da aber

$$d(x_n, z) < 1 \ \Rightarrow\ d(x_n, z) = 0,$$

folgt, dass

$$\forall n \geq N\, (x_n = z)\,.$$

■