Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 2

Aufgabe 1

Wir ordnen einer Funktion $f : A \to B$ eine binäre Relation $\sim_f \subseteq A \times A$ zu mit

$$x \sim_f y \quad \text{gdw} \quad f(x) = f(y)\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung. $\sim_f$ ist reflexiv, da $f(x) = f(x)$ für jedes $x \in A$ gilt. $\sim_f$ ist symmetrisch, da aus $f(x) = f(y)$ $f(y) = f(x)$ folgt. $\sim_f$ ist transitiv, da aus $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$ folgt $f(x) = f(z)$.

(b) Sei $\sim \subseteq A \times A$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie, daß es eine Menge B und eine Funktion $f : A \to B$ gibt, so daß $\sim = \sim_f$ ist.

Lösung. Wir nehmen die Menge aller Äquivalenzklassen $B := \{\, [x]_\sim : x \in A \,\}$ und die Funktion $f : A \to B : x \mapsto [x]_\sim$, die jedes Element von A auf seine Äquivalenzklasse abbildet. Dann gilt

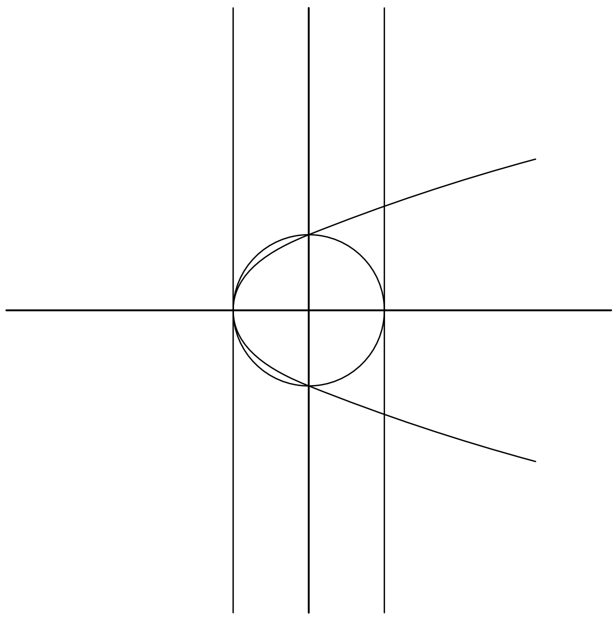
$$x \sim_f y \quad \text{gdw} \quad f(x) = f(y) \quad \text{gdw} \quad [x]_\sim = [y]_\sim \quad \text{gdw} \quad x \sim y\,.$$

(c) Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse $[(-1,0)]_{\sim_f}$ und zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem ein:

(i) $f_1(x,y) = x^2$
(ii) $f_2(x,y) = x^2 + y^2$
(iii) $f_3(x,y) = x - y^2$

Lösung.

$$\begin{aligned}
[(-1,0)]_{\sim_{f_1}} &= \{\, (x,y) : x = \pm 1 \,\}\,,\\
[(-1,0)]_{\sim_{f_2}} &= \{\, (x,y) : x^2 + y^2 = 1 \,\}\,,\\
[(-1,0)]_{\sim_{f_3}} &= \{\, (x,y) : x = y^2 - 1 \,\}\,.
\end{aligned}$$



Aufgabe 2

In dieser Aufgabe konstruieren wir die rationalen Zahlen aus den natürlichen Zahlen. Dazu betrachten wir die Menge S aller Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ mit $c \neq 0$. (Intuitiv soll so ein Tripel die rationale Zahl $\frac{a-b}{c}$ darstellen.) Für $(a, b, c), (x, y, z) \in S$ definieren wir

$$(a, b, c) \approx (x, y, z) \quad :\text{gdw} \quad az + cy = bz + cx\,,$$
$$(a, b, c) + (x, y, z) := (az + cx,\ bz + cy,\ cz)\,,$$
$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) := (ax + by,\ bx + ay,\ cz)\,.$$

Hinweis. Diese Aufgabe ist recht umfangreich und muß nicht vollständig bearbeitet werden. Überlegen Sie sich für jeden Aufgabenteil, was genau Sie zeigen müssen, und wählen Sie dann aus, was davon Sie tatächlich überprüfen wollen.

(a) Zeigen Sie, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf S ist.

Lösung. Reflexivität und Symmetrie sind einfach zu zeigen. Wir weisen Transitivität nach. Angenommen, daß $(a, b, c) \approx (u, v, w) \approx (x, y, z)$. Wir müssen zeigen, daß $(a, b, c) \approx (x, y, z)$. Wir wissen, daß

$$aw + cv = bw + cu \quad uz + wy = vz + wx\,.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$awz + cvz + cwy = bwz + cuz + cwy\,.$$

Mit der zweiten ergibt sich

$$bwz + cuz + cwy = bwz + cvz + cwx\,.$$

Also

$$awz + cvz + cwy = bwz + cvz + cwx\,.$$

Hieraus folgt

$$awz + cwy = bwz + cwx\,,$$

und somit

$$az + cy = bz + cx\,.$$

(Man beachte, daß gilt $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ und $ac = bc \Rightarrow a = b$.)

(b) Zeigen Sie, daß aus $(a, b, c) \approx (a', b', c')$ und $(x, y, z) \approx (x', y', z')$ folgt

$$(a, b, c) + (x, y, z) \approx (a', b', c') + (x', y', z')$$
und $$(a, b, c) \cdot (x, y, z) \approx (a', b', c') \cdot (x', y', z')\,.$$

Lösung. Wir zeigen die erste Aussage. Wegen

$$ac' + cb' = bc' + ca' \quad \text{und} \quad xz' + zy' = yz' + zx'$$

folgt

$$\begin{aligned}(az + cx)c'z' + cz(b'z' + c'y') &= ac'zz' + b'czz' + cc'xz' + cc'y'z \\ &= a'czz' + bc'zz' + cc'x'z + cc'yz' \\ &= (bz + cy)c'z' + (a'z' + c'x')cz\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$(az + cx,\ bz + cy,\ cz) \approx (a'z' + c'x',\ b'z' + c'y',\ c'z')\,.$$

(c) Nach (b) können wir auf $\mathbb{Q} := S/{\approx}$ die Operationen

$$\begin{aligned} [(a,b,c)]_\approx + [(x,y,z)]_\approx &:= [(a,b,c) + (x,y,z)]_\approx\,, \\ [(a,b,c)]_\approx \cdot [(x,y,z)]_\approx &:= [(a,b,c) \cdot (x,y,z)]_\approx \end{aligned}$$

definieren. (Warum benötigen wir (b) dazu?) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{Q} = S/{\approx}$ zusammen mit diesen beiden Operationen einen Körper bildet. (Dies ist der *Körper der rationalen Zahlen.*)

Lösung. Wir müssen die Axiome (A.1)–(A.4), (M.1)–(M.4) und (D) überprüfen. Man sieht leicht (nachrechnen), daß

$$\begin{aligned} (a,b,c) + (0,0,1) &\approx (a,b,c) \\ (a,b,c) + (b,a,c) &\approx (0,0,1) \\ (a,b,c) \cdot (1,0,1) &\approx (a,b,c)\,. \end{aligned}$$

Für die Existenz eines multiplikativen Inversen machen wir eine Fallunterscheidung. Ist $b = a + x$, so gilt

$$(a,b,c) \cdot (c,0,x) \approx (1,0,1)\,.$$

Ist $a = b + x$, so gilt

$$(a,b,c) \cdot (0,c,x) \approx (1,0,1)\,.$$

Assoziativität und das Distributivgesetz folgen durch Ausrechnen.