Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 1

Terminologie zur Mengenlehre

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen A und B ist die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, formal:

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A, \ b \in B \} .$$

Eine *binäre Relation* auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$. So eine Relation ist

- *reflexiv,* falls $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt;
- *symmetrisch,* falls $(a, b) \in R$ impliziert $(b, a) \in R$;
- *transitiv,* falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt $(a, c) \in R$.

Eine Relation R, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation.* Ist R eine Äquivalenzrelation und $a \in A$, so ist die *Äquivalenzklasse* von a die Menge

$$[a]_R := \{ b \in A : (a, b) \in R \} .$$

Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir auch $a \ R \ b$.

Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist ein Tripel (F, A, B), wobei $F \subseteq A \times B$ eine Relation (der *Graph* der Funktion f) ist, welche folgende Bedingung erfüllt:

Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in F$.

Wir bezeichnen dieses b als *Wert* von a unter f und schreiben dafür auch $f(a)$.

Eine Funktion $f : A \to B$ ist

- *injektiv,* falls $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$ gilt;
- *surjektiv,* falls es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$;
- *bijektiv,* falls f sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

Die Menge aller Funktionen von A nach B bezeichnen wir mit B^A.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche sind surjektiv?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Lösung. Ist weder injektiv noch surjektiv, da $f_1(-1) = 1 = f_1(1)$ gilt und es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$ gibt.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

Lösung. Ist injektiv und surjektiv, denn

$$x^3 = y^3 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

und für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = y$ für $x := \sqrt[3]{y}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin x$

Lösung. f_3 ist nicht injektiv, da $\sin 2\pi = 0 = \sin 0$, aber surjektiv, da es zu jedem $y \in [-1,1]$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin x = y$ gibt.

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$

Lösung. f_4 ist weder injektiv (siehe f_3) noch surjektiv. Z. B. gibt es zu $y = 2$ kein x mit $\sin x = y$.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Relationen sind reflexiv, welche symmetrisch, und welche transitiv?

(a) $R_1 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \,\}$

Lösung. R_1 ist reflexiv und transitiv, da immer $x \leq x$ gilt und aus $x \leq y \leq z$ $x \leq z$ folgt. R_1 ist nicht symmetrisch, da $1 \leq 2$ aber $2 \nleq 1$.

(b) $R_2 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \,\}$

Lösung. R_2 ist symmetrisch, da aus $x \neq y$ $y \neq x$ folgt, aber weder reflexiv noch transitiv, da z. B.

- $1 \neq 1$ nicht gilt,
- $1 \neq 2$ und $2 \neq 1$ gilt, nicht aber $1 \neq 1$.

(c) $R_3 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1 \,\}$

Lösung. R_3 ist reflexiv und symmetrisch, da $|x-x| = 0 < 1$ und $|x-y| = |y-x|$, aber nicht transitiv, da $|1-\frac{3}{2}| < 1$ und $|\frac{3}{2}-2| < 1$, aber $|1-2| \nless 1$.

(d) $R_4 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0 \text{ oder } x = y = 0 \,\}$

Lösung. R_4 ist reflexiv, da für alle x entweder $x^2 > 0$ oder $x = 0$ gilt, symmetrisch, da $xy = yx$ gilt, und transitiv, da aus $xy > 0$ und $yz > 0$ folgt $xz > 0$.

Aufgabe 3

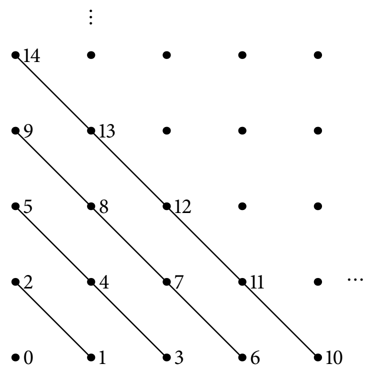
Geben Sie Bijektionen zwischen folgenden Mengen an:

(a) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Lösung. $f(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für gerade } n\,, \\ -(n+1)/2 & \text{für ungerade } n\,. \end{cases}$

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Lösung. $f(k,n) := \frac{1}{2}(k+n)(k+n+1) + n$



(c) $A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$

Lösung. $f(a,(b,c)) = ((a,b),c)$

($*$) $(A^B)^C \to A^{B \times C}$

Lösung. Für $g : C \to A^B$ setzen wir $f(g) := g'$, wobei $g' : B \times C \to A$ die Funktion mit $g'(b,c) := (g(c))(b)$ ist.