Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Probeklausur

Schreiben Sie bitte auf jede Seite Ihren Namen und numerieren Sie die Seiten durch. Bitte falten Sie am Ende der Klausur das Deckblatt und legen die übrigen Blätter hinein.

Nachname: . . . .
Vorname: . . . .
Matr.-Nr.: . . . .

Hinweise

- Die Prüfungszeit beträgt **90 Minuten.**
- Es können maximal **60 Punkte** erreicht werden. Davon reichen **48 Punkte** für die Note 1 auf jeden Fall aus.
- Antworten sollten immer begründet und jeder Schritt in der Lösung hinreichend erklärt sein, es sei denn, es wird ausdrücklich darauf hingewiesen.
- **Viel Glück!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte, maximal	12	12	12	12	12	60	
erreichte Punkte							

Aufgabe 1 12 Punkte

(a) Seien X und Y nichtleere Mengen. Für welche Funktionen $f : X \to Y$ ist folgende binäre Relation eine Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \quad :\text{gdw} \quad (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

(b) Zeigen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}^*$, daß

$$n! \leq 2\left(\tfrac{n}{2}\right)^n .$$

Hinweis. Benutzen Sie die Ungleichung $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n$, also $2(\frac{n}{2})^n \leq (1+\frac{1}{n})^n(\frac{n}{2})^n$.

Lösung. (a) Für eine konstante Funktion f gilt $x \sim y \Leftrightarrow x = y$. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Für eine injektive Funktion f gilt $x \sim y$ für alle $x, y \in X$. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Ist f weder konstant noch injektiv, so gibt es drei verschiedene Elemente $x, y, z \in X$ mit $f(x) = f(y) \neq f(z)$. Dann gilt $x \sim z$ und $z \sim y$, aber nicht $x \sim y$. Also ist $\sim$ nicht transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.

(b) Für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 1. Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(n+1)! = n!\,(n+1) \leq 2\Big(\frac{n}{2}\Big)^n(n+1) &\leq \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big(\frac{n}{2}\Big)^n(n+1)\\ &= \Big(\frac{n+1}{2}\Big)^n(n+1)\\ &= \frac{1}{2^n}(n+1)^n(n+1) = \frac{1}{2^n}(n+1)^{n+1} = 2\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{n+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 12 Punkte

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{13n^4 + (2-n)^2}{6n + 3n^4 + (n+3)^2}\,.$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge reeller Zahlen mit

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{(x_n)^2}{4} + 1\,.$$

Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, daß $x_n \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2^n n^2}\ ?$$

Hinweis. Verwenden Sie das Wurzelkriterium.
Lösung. (a)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{13n^4 + (2-n)^2}{6n + 3n^4 + (n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{13 + 4n^{-4} - 4n^{-3} + n^2}{6n^{-3} + 3 + n^{-2} + 6n^{-3} + 9n^{-4}} = \frac{13}{3}\,.$$

(b) Zunächst zeigen wir per Induktion nach n, daß $0 \le x_n \le 2$. Für $n = 0$ ist dies klar. Für $n+1$ erhalten wir

$$x_{n+1} = \frac{(x_n)^2}{4} + 1 \ge \frac{0}{4} + 1 = 1 \ge 0 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{(x_n)^2}{4} + 1 \le \frac{2^2}{4} + 1 = 2\,.$$

Die Folge ist also beschränkt. Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$$

hat die Nullstelle $x = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$. Somit ist $f(x) \ge 0$ für alle x und aus

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n)^2}{4} + 1 - x_n = f(x_n) \ge 0$$

folgt, daß die Folge aufsteigend ist.

Hieraus folgt, daß der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert. Wegen

$$x = \frac{x^2}{4} + 1$$

gilt $f(x) = 0$, also $x = 2$.

(c) Das Wurzelkriterium liefert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(x-3)^{2n}}{2^n n^2}} = \frac{|x-3|^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}^2} = \frac{|x-3|^2}{2} =: q\,.$$

Für $q < 1$, d. h. für $|x-3| < \sqrt{2}$ konvergiert die Reihe also absolut.

Für $|x-3| > \sqrt{2}$ divergiert sie. Für $|x-3| = \sqrt{2}$ ist

$$\frac{|x-3|^{2n}}{2^n n^2} = \frac{1}{n^2}\,.$$

Diese Reihe konvergiert ebenfalls absolut.

Aufgabe 3 12 Punkte

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 3 = 2\pi x$$

eine Lösung im Intervall $[0,3]$ besitzt.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in welchen die Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x) := \begin{cases} a & \text{für } x = 0\,, \\ \cos(x)\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

(c) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die näherungsweise Nullstellen besitzt, auch eine echte Nullstelle besitzt, d. h. zeigen Sie die Aussage

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in I)[|f(x)| < \varepsilon] \quad \Rightarrow \quad (\exists x \in I)[f(x) = 0]\,.$$

Lösung. (a) Wir suchen eine Nullstelle der stetigen Funktion $f(x) := x^4 - 2\pi x - 3$. Wegen $f(x) = -3 < 0$ und $f(3) = 81 - 6\pi - 3 > 0$ folgt nach dem Zwischenwertsatz, daß es eine solche Nullstelle zwischen 0 und 3 geben muß.

(b) Als Komposition stetiger Funktionen ist f_a in jedem Punkt $x \neq 0$ stetig. In $x = 0$ ist f_a nicht stetig, da die Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n = \frac{1}{\pi n}$ und $y_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ beide gegen 0 konvergieren, aber die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} f_a(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\cos \tfrac{1}{\pi n} \cdot 0) = 0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} f_a(y_n) = \lim_{n\to\infty} (\cos \tfrac{2}{\pi(2n+1)} \cdot 1) = \cos(0) = 1$$

verschieden sind.

(c) Nach Annahme finden wir zu $\varepsilon := 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in I$ mit $|f(x_n)| < \varepsilon$. Da I kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n>0}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Für $x := \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$ gilt

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Also ist $f(x) = 0$.

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x^2)^{\arctan(x)}.$$

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\tilde{x} \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D \setminus \{\tilde{x}\}$ differenzierbar. Gilt die folgende Implikation?

$$\lim_{\substack{x\to\tilde{x} \\ x\in D\setminus\{\tilde{x}\}}} f'(x) \text{ existiert nicht} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in } \tilde{x} \text{ nicht differenzierbar.}$$

(c) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(-1) < f(1)$. Zeigen Sie, daß ein $c \in]-1,1[$ existiert mit $f'(c) > 0$.

Lösung. (a) Wegen $f(x) = e^{\log(x^2)\cdot\arctan(x)} = e^{2\arctan(x)\log(x)}$ folgt

$$f'(x) = e^{2\arctan(x)\log(x)} \cdot \left(\frac{2\log(x)}{1+x^2} + \frac{2\arctan(x)}{x}\right).$$

(b) Die Aussage stimmt nicht. Ein Gegenbeispiel ist der Punkt $\tilde{x} = 0$ und die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Aufgabe 4 (b) auf Übungsblatt 13.

(c) Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in]-1,1[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2} > 0\,.$$

Aufgabe 5 12 Punkte

(a) Seien $a < s < t < b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = s \text{ oder } x = t\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion mit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, daß $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Lösung. (a) Diese Aufgabe ist leider etwas einfacher als beabsichtigt geraten: Da f eine Treppenfunktion ist, ist f Riemann-integrierbar und das Integral berechnet sich als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \cdot (s-a) + 0 \cdot (t-s) + 0 \cdot (b-t) = 0\,.$$

Wir präsentieren deshalb auch eine zweite Lösung, die auch für Nicht-Treppenfuktionen funktioniert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ konstruieren wir Treppenfunktionen φ und ψ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Hieraus folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f.

Sei also $\varepsilon > 0$. Wir wählen δ mit $0 < \delta < \varepsilon/4$ und so, daß δ kleiner ist als $(s-a)/2$, $(t-s)/2$ und $(b-t)/2$. Sei

$$\varphi(x) := 0 \quad \text{und} \quad \psi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [s-\delta, s+\delta] \cup [t-\delta, t+\delta]\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann gilt $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (2\delta + 2\delta) - 0 < \varepsilon\,.$$

Außerdem gilt

$$0 = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = 4\delta < \varepsilon\,,$$

und somit ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) Angenommen, es gibt einen Punkt x_0 mit $c := f(x_0) > 0$. Da f stetig ist, finden wir ein nichttriviales Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ um diesen Punkt mit $f(x) > c/2$ für alle $x \in [a,b]$. Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ die Treppenfunktion mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} c/2 & \text{für } x \in [a,b]\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \le f$ und somit

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}(b-a) > 0\,.$$

Ein Widerspruch.