Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Trebels
E. Briseid

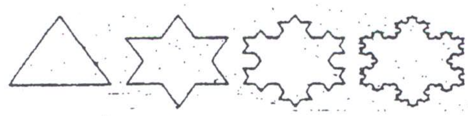
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.10.2009

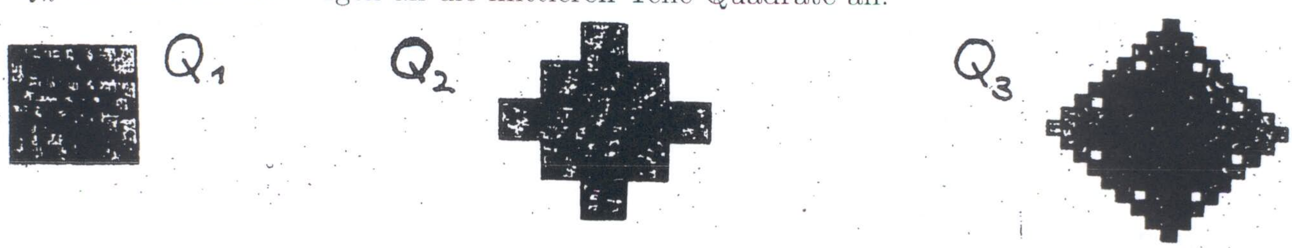
OWO-Übung Analysis I
WS 2009/10

(G0.1)

In der OWO-Vorlesung haben wir eine Folge von Polygonen konstruiert:



Wir werden jetzt diese Konstruktion ändern und eine andere Folge von Polygonen betrachten: $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$. Wir fangen an mit einem Quadrat Q_1 mit Seitenlänge 1. Wir erhalten jetzt das Polygon Q_2, indem wir jede Seite von Q_1 in drei gleich große Teile unterteilen und jeweils an den mittleren Teil jeder Seite von Q_1 ein Quadrat mit Seitenlänge 1/3 anfügen. Auf die gleiche Weise konstruieren wir Q_{n+1} ausgehend von Q_n: Wir teilen jede Seite von Q_n in drei Teile und fügen an die mittleren Teile Quadrate an.



Berechnen Sie die folgenden Werte für die Polygone Q_n: Die Anzahl der Seiten K_n, die Länge L_n jeder Seite, den Umfang U_n und die Fläche F_n. Machen Sie das für Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und allgemein für Q_n.

Wie verhalten sich U_n und F_n wenn n gegen ∞ strebt?

Lösung.

Wir haben die folgende Beziehungen für $n \geq 2$:

$$K_n = 5 \cdot K_{n-1},$$

$$L_n = \frac{1}{3} \cdot L_{n-1},$$

$$U_n = K_n \cdot L_n,$$
$$F_n = F_{n-1} + K_{n-1} \cdot L_n^2.$$

Also:

n	K_n	L_n	U_n	F_n
1	4	1	4	1
2	$4 \cdot 5$	$\frac{1}{3}$	$4 \cdot \frac{5}{3}$	$1 + \frac{4}{9}$
3	$4 \cdot 5^2$	$(\frac{1}{3})^2$	$4 \cdot (\frac{5}{3})^2$	$1 + \frac{4}{9} + \frac{4 \cdot 5}{9^2}$
4	$4 \cdot 5^3$	$(\frac{1}{3})^3$	$4 \cdot (\frac{5}{3})^3$	$1 + \frac{4}{9} + \frac{4 \cdot 5}{9^2} + \frac{4 \cdot 5^2}{9^3}$
...	...	...	...	...
n	$4 \cdot 5^{n-1}$	$(\frac{1}{3})^{n-1}$	$4 \cdot (\frac{5}{3})^{n-1}$	$1 + \frac{4}{9}(1 + \frac{5}{9} + \ldots + (\frac{5}{9})^{n-2})$

Die Formel für F_n in der Tabelle gilt für $n \geq 2$. Für $n \to \infty$ haben wir $U_n \to \infty$. Außerdem, da für $n \geq 2$ gilt

$$F_n = 1 + \frac{4}{9}(1 + \frac{5}{9} + \ldots + (\frac{5}{9})^{n-2}) = 1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - (5/9)^{n-1}}{1 - (5/9)} = 2 - (5/9)^{n-1},$$

haben wir $F_n \to 2$ für $n \to \infty$.

■

(G0.2)

Wir betrachten die Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k - 1} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{n^2 + n - 1}.$$

Gibt es ein $M > 0$, so dass $S_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder gilt $S_n \to \infty$, wenn $n \to \infty$?

Wir haben in der OWO-Vorlesung gesehen, dass, falls eine solche Schranke existiert, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-1}$ konvergiert, da alle Terme nichtnegativ sind.

Lösung.

Für $k \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{k^2+k-1} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Da wir in der OWO-Vorlesung gesehen haben, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, erhalten wir also

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k-1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Mit $M := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ erhalten wir $S_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-1}$ konvergiert.

■

(G0.3)

Wir betrachten die Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ nicht konvergiert, indem Sie zeigen, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \to \infty$ wenn $n \to \infty$.

Lösung.

Für $k \geq 1$ gilt $k \geq \sqrt{k}$, also

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Daraus folgt, dass

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

und wir haben in der OWO-Vorlesung gesehen, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ unendlich anwächst für $n \to \infty$.

■

(G0.4)

Wir konstruieren Rechtecke $R_1, R_2, R_3, \ldots$ wie folgt:

Das Startrechteck R_1 hat Länge 1 und Breite $1/4$. Dann teilen wir jede lange Seite von R_1 durch 4. Anschließend kleben wir auf die mittleren zwei Viertel der langen Seiten die lange Seite eines Rechtecks mit Länge $1/2$ und Breite $1/8$. Die lange Seite des kleinen Rechtecks, die das große Rechteck nicht berührt, nennen wir r_2 bzw. r_2'. Auf die mittleren zwei Viertel der kurzen Seiten kleben wir ebenfalls Rechtecke der Länge $1/2$ und Breite $1/8$. Diesmal kleben wir die Rechtecke mit den kurzen Seiten an. Die den Klebestellen gegenüber liegenden Seiten der kleinen Rechtecke nennen wir r_2'' und r_2'''. Hiermit haben wir R_2 konstruiert.

Haben wir das Polygon R_n konstruiert so ergibt sich R_{n+1} durch Anwenden der gleichen Schritte wie oben: Wir teilen also r_n, r'_n, r''_n, r'''_n in 4 gleiche Teile und kleben an die mittleren zwei Viertel dieser Seiten jeweils ein Rechteck der Länge $(1/2)^n$ und der Breite $(1/8)^n$.

Berechnen Sie die folgenden Werte für R_n: die Anzahl der Kanten K_n, den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n. Wie verhalten sich K_n, U_n und F_n, wenn n gegen ∞ strebt?

Lösung.

Wir erhalten $K_1 = 4$, $K_2 = K_1 + 4 \cdot 4$, und i.A. $K_{n+1} = K_n + 4 \cdot 4$. Das bedeutet aber, dass $K_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Für den Umfang gilt: $U_1 = 2 + 1/2$, $U_2 = U_1 + 4 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/8$, und i.A.

$$U_{n+1} = U_n + 4 \cdot (1/2)^n + 4 \cdot (1/2)^{n+2} = U_n + 5 \cdot (1/2)^n.$$

Also für $n \geq 2$:

$$U_n = 5/2 + 5 \cdot (1/2 + (1/2)^2 + \ldots + (1/2)^{n-1}) = 5/2 + 5/2 \cdot (1 + 1/2 + \ldots + (1/2)^{n-2})$$

und daher:

$$U_n = 5/2 + 5/2 \cdot \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} = 5/2 + 5 \cdot (1 - (1/2)^{n-1}).$$

Der Umfang bleibt also für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ($U_n \to 15/2$ $(n \to \infty)$).

Für den Flächeninhalt ergibt sich: $F_1 = 1/4$, $F_2 = F_1 + 4 \cdot F_1/4$, $F_3 = F_2 + 4 \cdot F_1/4^2$, und i.A.

$$F_{n+1} = F_n + F_1 \cdot (1/4)^{n-1} = 1/4 + (1/4 + (1/4)^2 + \ldots + (1/4)^n).$$

Also

$$F_{n+1} = 1/4 + 1/4 \cdot (1 + 1/4 + \ldots + (1/4)^{n-1})$$

und

$$F_n = 1/4 + 1/4 \cdot \frac{1 - (1/4)^{n-1}}{1 - 1/4} = 1/4 + 1/3 \cdot (1 - (1/4)^{n-1}).$$

Daher folgt $F_n \to 7/12$.