



Analysis I

Tutorium 15

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^a \frac{dx}{x}$$

für $a > 1$ mit Hilfe Riemannscher Summen.

Hinweis. Wählen Sie die Unterteilung $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$ mit $x_k := a^{k/n}$ für $0 \leq k \leq n$. Als Stützstellen können Sie $\xi_k := x_{k-1}$ verwenden.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß es genau ein Paar differenzierbarer Funktionen $c, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) $c(0) = 1$ und $s(0) = 0$.
- (ii) $c' = -s$ und $s' = c$.

Hinweis. Nehmen Sie an, es gäbe ein weiteres Paar f, g von Funktionen mit (i) und (ii), und betrachten Sie die Funktion

$$\varphi(x) = (f(x) - c(x))^2 + (g(x) - s(x))^2.$$

Aufgabe 3

Wir wissen bereits, daß eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-stetige Ableitung besitzen kann. Trotzdem kann eine Ableitung nicht beliebig „wild“ werden. In dieser Aufgabe zeigen wir, daß jede Ableitung den Zwischenwertsatz erfüllt, auch wenn sie nicht stetig ist.

Sei $a < b$ in \mathbb{R} und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) < \lambda < f'(b)$ gibt es einen Punkt $x \in]a, b[$ mit $f'(x) = \lambda$.