Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.01.2010

13. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T13.1)

In dieser Aufgabe werden wir folgenden überraschenden Satz beweisen:

Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgends differenzierbar sind.

Wir definieren dazu "Sägezahnfunktionen" ϕ_k: Sei $\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, so dass $\phi_0(x) = |x|$ für $-1 \leq x \leq 1$ und $\phi_0(x + 2n) = \phi_0(x)$ für $n \in \mathbb{Z}$, und sei für $k \in \mathbb{N}^*$ die Funktion $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi_k(x) = 4^{-k}\phi_0(4^k x)$. (Skizzieren Sie den Graphen von ϕ_k für z.B. $k = 0, 1, 2$.)

(i) Zeigen Sie, dass man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$ definieren kann.

(ii) Beweisen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Man überlege zunächst, dass für $|x - y| \leq 4^{-k_0}$ gilt

$$|\phi_k(x) - \phi_k(y)| \leq \begin{cases} 4^{-k_0} & \text{falls } k < k_0, \\ 4^{-k} & \text{falls } k \geq k_0. \end{cases}$$

(iii) Beweisen Sie, dass f nirgends differenzierbar ist.

Hinweis: Wir sagen, die Punkte $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ *liegen an derselben Flanke* von ϕ_j, wenn ϕ_j zwischen x und y linear ist. Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ lässt sich die Zahl $h_j := \pm(1/2)4^{-j}$ so wählen, dass ξ und $\xi + h_j$ an derselben Flanke von ϕ_j liegen. Man beweise zunächst folgende Relation:

$$\frac{\phi_k(\xi + h_j) - \phi_k(\xi)}{h_j} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } k \leq j, \\ 0 & \text{falls } k > j. \end{cases}$$

(T13.2)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\tilde{x} \in D$ und auf $D \setminus \{\tilde{x}\}$ differenzierbar. Zeigen Sie (mit Hilfe des Mittelwertsatzes), dass f differenzierbar im Punkt $\tilde{x}$ ist und $f'(\tilde{x}) = a$ gilt, falls $\lim_{x \to \tilde{x}} f'(x) = a$ gilt.