Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 10

Aufgabe 1

(a) Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to I$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit Periode 2π, d. h. eine Abbildung so daß

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, daß es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x + \pi) = f(x)\,.$$

(Intuitiv können wir f als eine Abbildung vom Einheitskreis S nach $\mathbb{R}$ betrachten. Dann entspricht $x + \pi$ dem Punkt, der x diametral gegenüber liegt. Wir suchen also zwei diametral gegenüberliegende Punkte, die denselben Funktionswert haben.)

Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ der Baire-Raum aus Aufgabe (T3.1), und sei $(\mathbb{N}, \rho)$ der metrische Raum mit Metrik $\rho(m, n) = |m - n|$. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ genau dann in einem Punkt $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ stetig ist, wenn eine Konstante $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $F(f) = F(g)$ gilt für alle Punkte $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $f(i) = g(i)$ für alle $i \leq N$, d. h. der Wert von $F(f)$ ist eindeutig durch ein Anfangsstück von f bestimmt.

Aufgabe 3

Eine Teilmenge $D \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt *beschränkt,* wenn eine Konstante $b > 0$ existiert mit

$$d(x, y) \leq b \quad \text{für alle } x, y \in D\,.$$

Eine Funktion $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ zwischen metrischen Räumen ist *Lipschitz-stetig,* wenn eine Konstante $L > 0$ (die *Lipschitz-Konstante* von f) existiert mit

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X\,.$$

f heißt *gleichmäßig stetig,* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta$$

gilt.

Sei (X, d) ein beschränkter metrischer Raum und (Y, ρ) ein beliebiger metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, daß jede Lipschitz-stetige Funktion $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ beschränkt ist (d. h. daß das Bild $\{ f(x) : x \in X \}$ von f beschränkt ist).

(b) Zeigen Sie, daß dies für gleichmäßig stetige Funktionen $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ nicht unbedingt der Fall sein muß.