Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

09.12.2009

9. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T9.1)

Zeigen Sie, dass $f :]0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}, \\ 0, & \text{falls } x \in]0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig in allen $x \in]0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ist.

(T9.2)

Wir haben in (T3.2) Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen behandelt. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq N)(d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Der Raum (X, d) heißt *vollständiger metrischer Raum*, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert. (Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ konvergiert.)

Seien (X, d) und (Y, ρ) metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Funktion f heißt *stetig* in $x \in X$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Die Funktion f heißt *stetig*, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

Eine Funktion $f : X \to X$ heißt *Kontraktion*, falls ein $q \in]0,1[$ existiert, so dass

$$(\forall x, y \in X)\Big(d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)\Big). \tag{1}$$

Dabei heißt q *Kontraktionskonstante* von f.

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $q \in]0,1[$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Man beweise den *Fixpunktsatz von Banach:*

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $q \in]0,1[$. Sei $x_0 \in X$ beliebig und

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt, d.h. einen Punkt $z \in X$ mit $f(z) = z$, und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen z. Weiter gilt die Fehlerabschätzung

$$d(z, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.