Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

25.11.2009

7. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T7.1)

Welche der folgenden Aussagen implizieren die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Welche der Aussagen implizieren die Konvergenz? Welche sind sogar äquivalent zur Konvergenz?

(i) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

(ii) Für alle $n \geq 1$ gilt die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(iii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \left(\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

(iv) Die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\geq 1}$ konvergiert.

(v) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge.

(vi) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \geq n_0) \quad \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \varepsilon\right)$.

(vii) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1 > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n > n_0$.

(viii) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\geq 1}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt.

(ix) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\geq 1}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(T7.2)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Man beweise:

(i) Zu beliebig vorgegebenem $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$, die gegen c konvergiert.

(ii) Es gibt Umordnungen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert.

(iii) Es gibt Umordnungen, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ weder konvergiert noch bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.