Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11.11.2009

5. Tutorium Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(T5.1)

In dieser Aufgabe konstruieren wir die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Sei X die Menge aller Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ definieren wir

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Longleftrightarrow \quad (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(ii) Sei $\mathbb{R} := X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim, \quad [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim.$$

Weiter definieren wir "$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ist positiv" durch

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \geq n)(x_m > 2^{-k}).$$

Zeigen Sie, dass $+$, $\cdot$ und $>$ wohl-definiert sind.

(iii) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit $+$, $\cdot$ und $>$ ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper ist.

Diese Aufgabe ist recht umfangreich und muss nicht vollständig bearbeitet werden. Am wichtigsten ist es, zu zeigen, dass das Vollständigkeits-Axiom erfüllt ist.