Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 4

Aufgabe 1

Mit jeder Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziieren wir die Folge

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

der *arithmetischen Mittel.*

(a) Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Zeigen Sie, daß dann auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

(b) Finden Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die dazugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2

Auf dem letzten Tutoriumsblatt haben wir den Begriff eines metrischen Raumes (X, d) eingeführt. Wir erinnern daran, daß eine Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt. Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
&d(x, y) \geq 0\,,\\
&d(x, y) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = y\,,\\
&d(x, y) = d(y, x)\,,\\
&d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\,.
\end{aligned}$$

(a) Sei X eine nichtleere Menge und $d_1, \dots, d_n$ Metriken auf X. Zeigen Sie, daß auch

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x, y)}{1 + d_i(x, y)}$$

eine Metrik auf X ist.

(b) Eine Teilmenge $D \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist *dicht,* wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $z \in D$ gibt, mit

$$d(x, z) \leq \varepsilon\,.$$

Zeigen Sie, daß eine Menge $D \subseteq X$ genau dann dicht in X ist, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, deren Elemente alle in D liegen.