



28.10.2009

3. Tutorium Analysis I Wintersemester 2009/2010

Metrische Räume

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf X , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0$ gilt g.d.w. $x = y$. (Die Metrik ist *positiv definit*.)
- (ii) $\forall x, y \in X (d(x, y) = d(y, x))$. (Symmetrie.)
- (iii) $\forall x, y, z \in X (d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z))$. (Dreiecksungleichung.)

Das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*, wenn d eine Metrik auf X ist. Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Metrik benutzt wird, bezeichnen wir auch X als einen metrischen Raum.

(T3.1)

(a) Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$. Zeigen Sie, dass (\mathbb{R}, d) ein metrischer Raum ist. Die Metrik d heißt die *natürliche Metrik*.

(b) Zeigen Sie:

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, dann ist die Funktion $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $d_Y(x, y) = d(x, y)$ für $(x, y) \in Y \times Y$ definiert ist, eine Metrik auf Y .

(Der metrische Raum (Y, d_Y) heißt *metrischer Teilraum* von (X, d) . Wir sagen, d_Y ist die von d auf Y *induzierte Metrik*.)

(c) Sei X eine beliebige Menge, und sei $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Die Metrik d nennt man die *diskrete Metrik* auf X , und (X, d) ist ein *diskreter metrischer Raum*.

(d) Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\tilde{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{d}(x, y) := \min(1, d(x, y)).$$

Zeigen Sie, dass (X, \tilde{d}) ein metrischer Raum ist. Wir sagen, dass die Metrik \tilde{d} durch *Trunkierung* aus d hervorgeht.

(★) Sei $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Für $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $f \neq g$ setzen wir

$$m(f, g) := \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}.$$

Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(f, g) := \begin{cases} 0 & \text{falls } f = g, \\ 2^{-m(f, g)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiert. Der metrische Raum $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ heißt *Baire-Raum*.

(T3.2)

Sei X eine Menge. Eine *Folge* in X ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, oder, allgemeiner, eine Funktion $f : \{k \in \mathbb{Z} : k \geq k_0\} \rightarrow X$, für ein $k_0 \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit $f(n) = x_n$.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , und $z \in X$. Wir sagen, die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* z falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (d(x_n, z) < \varepsilon).$$

- (a) In der Vorlesung haben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen gegen eine reelle Zahl kennengelernt. Zeigen Sie, dass diese mit der oben gegebenen Definition mit $X = \mathbb{R}$ und der natürlichen Metrik d übereinstimmt.
- (b) Sei X eine Menge, und sei d die diskrete Metrik auf X . Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , und sei $z \in X$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z konvergiert g.d.w.

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (x_n = z).$$