Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 2

Aufgabe 1

Wir ordnen einer Funktion $f : A \to B$ eine binäre Relation $\sim_f \subseteq A \times A$ zu mit

$$x \sim_f y \quad \text{gdw} \quad f(x) = f(y)\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $\sim \subseteq A \times A$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie, daß es eine Menge B und eine Funktion $f : A \to B$ gibt, so daß $\sim = \sim_f$ ist.

(c) Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse $[(-1, 0)]_{\sim_f}$ und zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem ein:

(i) $f_1(x, y) = x^2$
(ii) $f_2(x, y) = x^2 + y^2$
(iii) $f_3(x, y) = x - y^2$

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe konstruieren wir die rationalen Zahlen aus den natürlichen Zahlen. Dazu betrachten wir die Menge S aller Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ mit $c \neq 0$. (Intuitiv soll so ein Tripel die rationale Zahl $\frac{a-b}{c}$ darstellen.) Für $(a, b, c), (x, y, z) \in S$ definieren wir

$$(a, b, c) \approx (x, y, z) \quad :\text{gdw} \quad az + cy = bz + cx\,,$$

$$(a, b, c) + (x, y, z) := (az + cx,\ bz + cy,\ cz)\,,$$
$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) := (ax + by,\ bx + ay,\ cz)\,.$$

Hinweis. Diese Aufgabe ist recht umfangreich und muß nicht vollständig bearbeitet werden. Überlegen Sie sich für jeden Aufgabenteil, was genau Sie zeigen müssen, und wählen Sie dann aus, was davon Sie tatächlich überprüfen wollen.

(a) Zeigen Sie, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf S ist.

(b) Zeigen Sie, daß aus $(a, b, c) \approx (a', b', c')$ und $(x, y, z) \approx (x', y', z')$ folgt

$$(a, b, c) + (x, y, z) \approx (a', b', c') + (x', y', z')$$
und
$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) \approx (a', b', c') \cdot (x', y', z')\,.$$

(c) Nach (b) können wir auf $\mathbb{Q} := S/\approx$ die Operationen

$$[(a, b, c)]_\approx + [(x, y, z)]_\approx := [(a, b, c) + (x, y, z)]_\approx\,,$$
$$[(a, b, c)]_\approx \cdot [(x, y, z)]_\approx := [(a, b, c) \cdot (x, y, z)]_\approx$$

definieren. (Warum benötigen wir (b) dazu?) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{Q} = S/\approx$ zusammen mit diesen beiden Operationen einen Körper bildet. (Dies ist der *Körper der rationalen Zahlen.*)