Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Tutorium 1

Terminologie zur Mengenlehre

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen A und B ist die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, formal:

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A,\ b \in B \}.$$

Eine *binäre Relation* auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$. So eine Relation ist

- *reflexiv,* falls $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$ gilt;
- *symmetrisch,* falls $(a, b) \in R$ impliziert $(b, a) \in R$;
- *transitiv,* falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt $(a, c) \in R$.

Eine Relation R, welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation.* Ist R eine Äquivalenzrelation und $a \in A$, so ist die *Äquivalenzklasse* von a die Menge

$$[a]_R := \{ b \in A : (a, b) \in R \}.$$

Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir auch $a\ R\ b$.

Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist ein Tripel (F, A, B), wobei $F \subseteq A \times B$ eine Relation (der *Graph* der Funktion f) ist, welche folgende Bedingung erfüllt:

Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in F$.

Wir bezeichnen dieses b als *Wert* von a unter f und schreiben dafür auch $f(a)$.

Eine Funktion $f : A \to B$ ist

- *injektiv,* falls $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$ gilt;
- *surjektiv,* falls es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$;
- *bijektiv,* falls f sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

Die Menge aller Funktionen von A nach B bezeichnen wir mit B^A.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche sind surjektiv?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Relationen sind reflexiv, welche symmetrisch, und welche transitiv?

(a) $R_1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \}$

(b) $R_2 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \}$

(c) $R_3 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < 1 \}$

(d) $R_4 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0 \text{ oder } x = y = 0 \}$

Aufgabe 3

Geben Sie Bijektionen zwischen folgenden Mengen an:

(a) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

(c) $A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$

(*) $(A^B)^C \to A^{B \times C}$