Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 13

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^x \quad \text{und} \quad g(x) = \sin\left(\tfrac{1}{x^2+1}\right) .$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen f' und g'.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und g.

Aufgabe 2

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$

(b) $f(x)\dfrac{\mathrm{d}^n g(x)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \dfrac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}[f^{(k)}(x)g(x)]$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß folgende Ungleichung für alle $x > 0$ gilt:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} .$$

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen. Ist g' im Punkt $x = 0$ stetig?

(a) $f(x) = x^2 e^{\sin(x)}$

(b) $g(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 , \\ 0 & \text{für } x = 0 . \end{cases}$

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß folgende Ungleichungen für alle $x \in (0, \pi/2)$ gelten:

(a) $x \cos(x) < \sin(x)$

(b) $\tan(x) > x + \dfrac{x^3}{3}$