Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22.01.2010

12. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G12.1)

Man berechne die exakten Werte von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ an den Stellen $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$.

(G12.2)

(i) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $a \in \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar ist, dass aber f in $a = 0$ nicht differenzierbar ist. Verwenden Sie hierzu nur die Definition und nicht die Regel (15.17). Bestimmen Sie $f'(a)$ für $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Sei weiter $a \in \mathbb{R}$. Man bestimme $f'(a)$ und $g'(a)$ ohne die Regel

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

zu benutzen, und man bestimme Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \phi(x)$$

und

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \psi(x),$$

und so dass

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\phi(x)}{x-a} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\psi(x)}{x-a} = 0.$$

(G12.3)

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gelte

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Beweisen Sie, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Hausaufgaben

(H12.4)

(i) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)^{517}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

(H12.5)

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}. \tag{1}$$

(iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 + \sin x$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) > 0$.

(b) Aus dem Ergebnis aus (a) werden wir später schließen können, dass f streng monoton wachsend ist. Sei das jetzt vorausgesetzt.

Zeigen Sie, dass f eine differenzierbare Umkehrfunktion g hat, und berechnen Sie $g'(1)$.