Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Übung 11

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ folgender Gleichungen:

(a) $\dfrac{z}{1-i} + \dfrac{8+i}{i-2} = \dfrac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i$

(b) $4z + \dfrac{52}{z} = 24 \quad$ für $z \neq 0$

(c) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4i = 0$

Aufgabe 2

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ setzen wir

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ Zahlen, so daß $\tan x$, $\tan y$ und $\tan(x+y)$ definiert sind. Zeigen Sie, daß

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}\,.$$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ und $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$, sofern sie existieren.

(c) Ist f oder g stetig in 0?

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende, stetige Funktion mit Bild $B := f(D)$.

(a) Zeigen Sie folgende Aussage:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in D)[x + \varepsilon \leq y \to f(x) + \delta \leq f(y)]\,.$$

(b) Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to D$ stetig ist.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Reihen konvergieren?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)} \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$