Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18.12.2009

10. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G10.1) (Minitest. Bearbeidungszeit nicht mehr als 5 Minuten.)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei $D = [0,1]$.

(i) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(D) = \mathbb{R}$.

(ii) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(D) =]0,1[$.

(iii) Es existiert eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(D) = [0,1] \cup [2,3]$.

(G10.2)

Eine auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, falls

$$(\forall x, y \in D)\Big(|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\Big). \tag{1}$$

(i) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgende Implikationskette:

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ gleichmäßig stetig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ stetig.}$$

(ii) Es sei

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(iii) Es sei

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Zeigen Sie, dass g gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

(G10.3)

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Man beweise: Eine stetige Funktion $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie sich stetig auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ fortsetzen lässt.

Hausaufgaben

(H10.4)

Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^4 + 16x - 32 + \sqrt{|x|}$.

(i) Ist f beschränkt? Ist f stetig?

(ii) Besitzt f ein Maximum und/oder ein Minimum?

(iii) Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle besitzt.

(iv) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -1$ mindestens eine Lösung besitzt.

(H10.5)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und es gelte $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f in 0 stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.