



Analysis I

Übung 9

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f_n(x) := |x + 1|^n.$$

- (a) Zeigen Sie, daß f_n für jedes n stetig ist.
- (b) Für welche x ist die Funktion

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

definiert? In welchen x ist sie stetig?

Aufgabe 2

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Zeigen Sie, daß f genau dann stetig im Punkt a ist, wenn gilt

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x \searrow a} f(x).$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^2 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$
$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{n} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4

Seien $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche auf abgeschlossenen Intervallen $D_k = [a_k, b_k]$ definiert sind. Angenommen, es gilt

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{für alle } x \in D_1 \cap D_2.$$

Dann können wir eine Funktion $g : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$g(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in D_1, \\ f_2(x) & \text{für } x \in D_2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß g stetig ist.