Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

04.12.2009

8. Übung Analysis I

Wintersemester 2009/2010

(G8.1)

(i) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

(ii) Sei $0 < \alpha < 1$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch:

$$a_0 := \alpha, \qquad a_{n+1} := \frac{2a_n + 1}{3}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

(G8.2)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und H die Menge ihrer Häufungspunkte. Man zeige

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup H, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf H$$

und $\sup H \in H$, $\inf H \in H$.

(Das heißt, wir zeigen, dass der Limes superior und der Limes inferior das Maximum bzw. das Minimum der Menge der Häufungspunkte sind.)

Hausaufgaben

(H8.3)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_0 := \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

(H8.4)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\le \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)\\ &\le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

(ii) Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die in (i) überall “$<$” gilt.