Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

27.11.2009

7. Übung Analysis I

Wintersemester 2009/2010

(G7.1) (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Es gebe ein θ mit $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(\forall n \geq n_0)(\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta).$$

(i) Man beweise, dass die Reihe absolut konvergiert.

(ii) Man zeige, dass die Bedingung

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\sqrt[n]{|a_n|} < 1) \tag{1}$$

nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist. Ist dies eine notwendige Bedingung?

(G7.2)

Die bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei eine beschränkte Umordnung, d.h. es gebe ein $d \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\tau(n) - n| \leq d \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise: Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergiert.

Hausaufgaben

(H7.3)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergent sind, bzw. für welche $x \in \mathbb{R}$ die konvergent sind:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$.

(H7.4)

In der Vorlesung haben wir die Definition der Eulerschen Zahl e gesehen:

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen, $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(i) Man beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - s_n \leq \frac{e-1}{(n+1)!}.$$

(Für $n = 2$ liefert diese Abschätzung $2,66 < e < 2,8$.)

(ii) Nehmen Sie an, dass $p, q \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $e = p/q$, und benutzen Sie die Abschätzung aus (i) mit $n = q$ um einen Widerspruch zu erhalten.