Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n-1} x^n$.

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Konvergieren dann auch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}\ ?$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

Aufgabe 4

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Wir setzen

$$d_n := n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ und ein $\beta > 1$ gibt mit $d_n \geq \beta$ für alle $n \geq N$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Hinweis. Zeigen Sie zuerst, daß

$$(\beta - 1)a_n \leq (n-1)a_n - n a_{n+1}, \quad \text{für } n \geq N.$$

(b) Die Voraussetzung für das Quotienten-Kriterium impliziert die Voraussetzung für das Kriterium aus (a). Das heißt, wenn man mit dem Quotienten-Kriterium zeigen kann, daß eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann kann man dies auch mit dem Kriterium aus (a) zeigen.