Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.11.2009

4. Übung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(G4.1)

(i) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man entscheide bei beiden Folgen, welche der drei Eigenschaften "beschränkt", "konvergent" bzw. "divergent" vorliegen, und man bestimme im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(ii) Bestimmen Sie den Wert der Reihen

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}.$$

(G4.2)

(i) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq N,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ ist. Man zeige: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: c \in \mathbb{R},$$

so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und besitzt ebenfalls den Grenzwert c.

(ii) Man gebe Beispiele reeller Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ an, so dass jeder der folgenden Fälle eintritt:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.
(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$.
(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.
(d) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.