Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.11.2009

4. Hausübung Analysis I
Wintersemester 2009/2010

(H4.1)

(i) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$a_n := \frac{1-3n^4}{n^4+5n^3+n+1} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{n^3-(-1)^n n^2}{9+7n+2n^5} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man entscheide bei beiden Folgen, welche der drei Eigenschaften "beschränkt", "konvergent" bzw. "divergent" vorliegen, und man bestimme im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_0 > 0$, $a_3 = -2/9$ und $a_5 = -2/81$. Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei *geometrisch*, d.h., es gibt $c, x \in \mathbb{R}$ so dass $a_n = cx^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Berechnen Sie den Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(iii) Berechnen Sie den Reihenwert der folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+k}\Big].$$

(H4.2)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie für die folgenden vier Aussagen jeweils, ob sie allgemein gültig sind. Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(iii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(iv) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.