Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I
Übung 2

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgende Gleichung für reelle Zahlen $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_i b_k\,.$$

Hinweis. Versuchen Sie einen Beweis per Induktion nach m.

Aufgabe 2

Wir versuchen, die reellen Zahlen um zwei unendliche Zahlen $\pm\infty$ zu erweitern. Auf der Menge $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definieren wir die Operationen $+$ und $\cdot$ folgendermaßen:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind $a + b$ und $a \cdot b$ die übliche Summe bzw. Produkt.
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist
$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty\,, \\ a + (-\infty) &= (-\infty) + a = -\infty\,, \\ \infty + (-\infty) &= (-\infty) + \infty = 0\,. \end{aligned}$$
- Für $a \in \mathbb{R}$ ist
$$\begin{aligned} a \cdot \infty = \infty \cdot a &= \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0\,, \\ 0 & \text{für } a = 0\,, \\ -\infty & \text{für } a < 0\,, \end{cases} \\ a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a &= \begin{cases} -\infty & \text{für } a > 0\,, \\ 0 & \text{für } a = 0\,, \\ \infty & \text{für } a < 0\,, \end{cases} \\ \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) &= \infty\,, \\ \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty &= -\infty\,. \end{aligned}$$

Wird $\mathbb{R}_\infty$ dadurch zu einem Körper? Überprüfen Sie, welche der Körperaxiome gelten.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Zeigen Sie per Induktion nach n, daß folgende Ungleichungen für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gelten:

(a) $2n + 1 < 2^n$

(b) $n^2 \leq 2^n$

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes folgende Ungleichung:

$$(1 + x)^n > \frac{1}{4} n^2 x^2 \qquad \text{für reelle Zahlen } x \geq 0 \text{ und natürliche Zahlen } n \geq 2\,.$$