Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
MSc Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2009/2010
16.10.2009

1. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Käferkunde)

Ein Käfer krabbelt auf den Kanten einer n-seitigen Pyramide (d.h $n \geq 3$, n Seitenflächen und eine Grundfläche). Sein Weg beginnt und endet im Mittelpunkt der selben Grundkante. Unterwegs durchläuft er jeden Punkt höchstens einmal. Zeige, dass ihm dazu $\#(n) := 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedene Wege zur Verfügung stehen. (Ein Weg soll hier immer aus mehr als einem Punkt bestehen. Zwei Wege gelten hier als gleich, wenn sie aus den selben Punkten bestehen.)

Aufgabe G2 (Induktion)

(a) Sei n_0 eine ganze Zahl und $A(n)$ eine von n abhängige Aussage. Zeigen Sie:

$$Q: \quad \text{Wenn } \forall n \geq n_0 \big(\forall m (n_0 \leq m < n \rightarrow A(m)) \rightarrow A(n)\big), \text{ dann } \forall n \geq n_0 A(n).$$

Das ist eine Variante des Prinzips der vollständigen Induktion.

(b) Wir haben in (a) gesehen, dass man das Prinzip der vollständigen Induktion

$$P: \quad \text{Wenn } A(n_0) \text{ und } \forall n \geq n_0 (A(n) \rightarrow A(n+1)), \text{ dann } \forall n \geq n_0 A(n),$$

benutzen kann, um das Prinzip Q zu beweisen. Zeigen Sie jetzt, dass man durch Anwendung von Q das Prinzip P beweisen kann. Dies zeigt in gewissem Sinn, dass P und Q “äquivalent” sind.

(c) Beweisen Sie:
Jede nichtleere Menge A natürlicher Zahlen hat ein Minimum, d.h. ein Element $n \in A$, sodass $\forall m \in A (n \leq m)$.
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

(d) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \big(f(n) \leq f(m)\big).$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Induktion und Axiome) (2 Punkte)

Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\prod_{i=1}^{m} (1 + a_i) > 2^n, \qquad \text{so folgt} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1 + k) \leq 2^k$, für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H2 (Binomialkoeffizient und vollständige Induktion) (2 Punkte)

Zeige mittels vollständiger Induktion, daß für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage gilt:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

Wobei wir $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ setzen.