Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2009/2010

Analysis I

Probeklausur

Schreiben Sie bitte auf jede Seite Ihren Namen und numerieren Sie die Seiten durch. Bitte falten Sie am Ende der Klausur das Deckblatt und legen die übrigen Blätter hinein.

Nachname: . . . .
Vorname: . . . .
Matr.-Nr.: . . . .

Hinweise

- Die Prüfungszeit beträgt **90 Minuten.**
- Es können maximal **60 Punkte** erreicht werden. Davon reichen **48 Punkte** für die Note 1 auf jeden Fall aus.
- Antworten sollten immer begründet und jeder Schritt in der Lösung hinreichend erklärt sein, es sei denn, es wird ausdrücklich darauf hingewiesen.
- **Viel Glück!**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ	Note
Punkte, maximal	12	12	12	12	12	60	
erreichte Punkte							

Aufgabe 1 12 Punkte

(a) Seien X und Y nichtleere Mengen. Für welche Funktionen $f : X \to Y$ ist folgende binäre Relation eine Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \quad :\text{gdw} \quad (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

(b) Zeigen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}^*$, daß

$$n! \leq 2\left(\tfrac{n}{2}\right)^n .$$

Hinweis. Benutzen Sie die Ungleichung $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n$, also $2(\frac{n}{2})^n \leq (1 + \frac{1}{n})^n(\frac{n}{2})^n$.

Aufgabe 2 12 Punkte

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{13n^4 + (2-n)^2}{6n + 3n^4 + (n+3)^2}\,.$$

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge reeller Zahlen mit

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{(x_n)^2}{4} + 1\,.$$

Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst, daß $x_n \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2^n n^2}\ ?$$

Hinweis. Verwenden Sie das Wurzelkriterium.

Aufgabe 3 12 Punkte

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x^4 - 3 = 2\pi x$$

eine Lösung im Intervall $[0,3]$ besitzt.
(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in welchen die Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_a(x) := \begin{cases} a & \text{für } x = 0\,, \\ \cos(x)\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

stetig ist.
(c) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, daß eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die näherungsweise Nullstellen besitzt, auch eine echte Nullstelle besitzt, d. h. zeigen Sie die Aussage

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in I)[|f(x)| < \varepsilon] \quad \Rightarrow \quad (\exists x \in I)[f(x) = 0]\,.$$

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x^2)^{\arctan(x)}.$$

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\tilde{x} \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D \setminus \{\tilde{x}\}$ differenzierbar. Gilt die folgende Implikation?

$$\lim_{\substack{x\to\tilde{x} \\ x\in D\setminus\{\tilde{x}\}}} f'(x) \text{ existiert nicht} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in } \tilde{x} \text{ nicht differenzierbar.}$$

(c) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(-1) < f(1)$. Zeigen Sie, daß ein $c \in]-1,1[$ existiert mit $f'(c) > 0$.

Aufgabe 5 12 Punkte

(a) Seien $a < s < t < b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, daß die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = s \text{ oder } x = t\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion mit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, daß $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.