Fachbereich Mathematik
PD Dr. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 09/10 9./10.2.2010

Analysis III – Funktionentheorie

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $S \subseteq \mathbb{C}$ endlich mit $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im}(z)\geq 0}} z \cdot f(z) = 0$, d.h. für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in \mathbb{C}\,, z_n \to \infty$ und $\operatorname{Im}(z_n) \geq 0$ gilt $z_n f(z_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

(a) Zeigen Sie: Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S, \operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}_f(a).$$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Ist der Wert des Integrals reell?

LÖSUNG: (a) Da das untersuchte Integral nach Voraussetzung existiert, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir wählen nun $r > 0$ so groß, dass $S \subseteq B_r(0)$ gilt. Das geht, da S endlich vorausgesetzt ist. Damit betrachten wir den Weg $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, der einen Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius r beschreibt. Dann ist $\gamma := [-r,r] + \gamma_r$ ein nullhomologer Zyklus in $\mathbb{C}$ und es gilt nach Voraussetzung $\operatorname{Spur}(\gamma) \cap S = \emptyset$. Mit dem Residuensatz gilt also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S} I(\gamma,a)\operatorname{Res}_f(a) = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a\in S, \operatorname{Im}(a)>0} \operatorname{Res}_f(a),$$

da $I(\gamma,a)$ für alle a aus der oberen Halbebene Eins und für alle aus der unteren Halbebene Null ist.

Weiter ist

$$\int_{-r}^{r} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[-r,r]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

und wir können das letzte Integral folgendermaßen abschätzen

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi r|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t$$

Nun impliziert die Voraussetzung $\lim_{|z|\to\infty, \operatorname{Im}(z)\geq 0} zf(z) = 0$, dass $\lim_{r\to\infty} r|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})| = 0$ ist und zwar gleichmäßig in $\phi \in [0,\pi]$, womit

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z \leq \lim_{r\to\infty} \int_0^\pi r|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t = 0$$

gilt.

Das führt schließlich auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{a\in S,\mathrm{Im}(a)>0}\mathrm{Res}_f(a).$$

(b) Wir wenden natürlich (a) mit $f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^4}$ an. Dann ist f nur an höchstens vier Stellen nicht holomorph und keine der Singularitäten ist auf der reellen Achse.

Weiter gilt für große $|z|$ eine Abschätzung $|1+z^4| \geq C|z|^4$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} |zf(z)| &= \lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} \frac{|z|}{|1+z^4|}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \leq \lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} \frac{|z|}{C|z|^4}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = \frac{1}{C}\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} \frac{1}{|z|^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(z)}\\ &\leq \frac{1}{C}\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} \frac{1}{|z|^3}\cdot 1 = 0,\end{aligned}$$

also gilt $\lim_{|z|\to\infty,\mathrm{Im}(z)\geq 0} zf(z) = 0$ und wir können (a) anwenden. Die Singularitäten von f liegen in $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$ und $z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4}$. Davon liegen nur z_1 und z_2 in der oberen Halbebene. Also gilt mit (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}_f(z_1) + \mathrm{Res}_f(z_2)\big).$$

Da in z_1 und z_2 Pole erster Ordnung vorliegen, gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_f(z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}-(1-\mathrm{i})\big)}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})/\sqrt{2}}\end{aligned}$$

und genauso

$$\mathrm{Res}_f(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})/\sqrt{2}}.$$

Zusammen ist dann

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\Big[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})/\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})/\sqrt{2}}\Big]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\Big[(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/\sqrt{2}} - (1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}/\sqrt{2}}\Big]\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\mathrm{Im}\Big[(1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/\sqrt{2}}\Big]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\big(\cos(1/\sqrt{2}) + \sin(1/\sqrt{2})\big).\end{aligned}$$

Das Integral hat also einen reellen Wert.

(G 2)

Bei Erkundungsflügen des Raumschiffs Enterprise im Rouché-Nebel ist nach durchfliegen mehrerer elektromagnetischer Disturberanzen ein Problem in der Beameinheit aufgetreten. Die Materialisierungskanone spielt verrückt und verteilt alles, was auf das Raumschiff gebeamt wird, ziemlich gleichmäßig auf der kreisrunden (und mit der komplexen Einheitskreisscheibe identifizierten) Plattform.

Scotty konnte die Störung schon so weit eindämmen, dass die Moleküle nicht mehr auf einer dichten Menge verteilt werden, sondern die Kanone schon auf einige Punkte fokussiert und die ankommenden Moleküle stochastisch auf diese verteilt. Leider ergeben sich diese Punkte durch eine recht komplizierte Rechnung als die Lösungen der Gleichung

$$\sin(z) = \frac{1}{2}z^7 - 3z.$$

Natürlich ist das Außenteam gerade unterwegs und müsste dringend hochgebeamt werden, wobei es zweckmäßigerweise in genau ein Einzelteil zerlegt werden sollte.

Kann Scotty das Außenteam gefahrlos hochbeamen?

LÖSUNG: Offensichtlich ist Null eine Lösung der Gleichung

$$\sin(z) = \frac{1}{2}z^7 - 3z.$$

Um Scotty zu beruhigen müssen wir also zeigen, dass diese im Einheitskreis $\mathbb{D}$ keine weitere Lösung besitzt. Wir schreiben dies als Nullstellensuche für die Funktion

$$f(z) := \sin(z) - \frac{1}{2}z^7 + 3z, \quad z \in \mathbb{C},$$

im Einheitskreis um und verwenden den Satz von Rouché.

Dazu betrachten wir die Funkion $g(z) := 3z - 1/2 \cdot z^7$, $z \in \mathbb{C}$. Dann sind f und g holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ und der Weg, der den Rand des Einheitskreises beschreibt, ist nullhomolog in $\mathbb{C}$. Weiter gilt für alle z auf dem Rand des Einheitskreises, also alle mit $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}
|f(z) - g(z)| = |\sin(z)| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \sinh(1) \\
&= \frac{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}}{2} < \frac{\mathrm{e}}{2} < \frac{3}{2} < \frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2} = 3|z| - \frac{1}{2}|z|^7 = |3z| - \Big|\frac{z^7}{2}\Big| \le \Big||3z| - \Big|\frac{z^7}{2}\Big|\Big| \\
&\le \Big|3z - \frac{1}{2}z^7\Big| = |g(z)|.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché hat damit f im Einheitskreis genauso viele Nullstellen wie g.

Es bleibt also zu zeigen, dass g in $\mathbb{D}$ nur eine Nullstelle hat. Wieder ist mit $g(0) = 0$ eine Nullstelle offensichtlich, es bleibt also zu zeigen, dass

$$h(z) = \frac{g(z)}{z} = 3 - \frac{1}{2}z^6, \quad z \in \mathbb{C},$$

keine Nullstelle im Einheitskreis hat. Sei z_0 eine Nullstelle von h. Dann gilt $3 - z_0^6/2 = 0$, d.h. $z_0^6 = 6$. Also haben wir $|z_0|^6 = 6$ und damit $|z_0| = \sqrt[6]{6} > 1$.

Also hat h in $\mathbb{D}$ keine Nullstelle, d.h. g hat in $\mathbb{D}$ genau eine Nullstelle und f schließlich hat auch nur eine Nullstelle im Einheitskreis und Scotty kann die Maschine anwerfen.

(G 3)

Bestimmen Sie für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG: Zunächst beobachten wir, dass das Integral als uneigentliches Integral absolut konvergiert, denn es gilt

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\cos(\omega x)}{1 + x^2}\Big|\,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x,$$

was eine konvergente Majorante ist.

Zweitens ist der Integrand gerade, d.h. es gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Schließlich gilt, da der Kosinus eine gerade Funktion ist, $\cos(\omega x) = \cos(-\omega x) = \cos(|\omega| x)$, wir können uns also auf $\omega \geq 0$ beschränken.

Sei also von nun an $\omega \geq 0$. Wir betrachten

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{z^2+1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}.$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\Big(\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\Big) = \mathrm{Re}\Big(\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\Big).$$

Sei $S := \{-i, i\}$. Die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus S \to \mathbb{C}$ ist homomorph. In der oberen Halbebene liegt die isolierte Singularität i. Man sieht, dass es sich um einen Pol erster Ordnung handelt und somit erhalten wir für dieses Residuum

$$\mathrm{Res}_f(\mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}}{z+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\omega}}{2\mathrm{i}}.$$

Weiter gilt für alle $|z| > 1$ mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}\omega z)} = \frac{1}{|z^2-(-1)|}\mathrm{e}^{-\omega\mathrm{Im}(z)} \leq \frac{1}{|z^2|-1}.$$

Somit ist

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} zf(z) = 0$$

und wir haben unter Verwendung von Aufgabe G1

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-\omega}.$$

Zusammengenommen erhalten wir also

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{\pi\mathrm{e}^{-\omega}}{2}.$$