Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 26./27.1.2010

Analysis III – Funktionentheorie

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

(a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f im Kreisring $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$ und im Kreisring $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(b) Bestimmen Sie weiter $\omega_f(0)$, $\omega_f(1)$ und $\omega_f(2)$.

LÖSUNG: (a) Im Kreisring R_1 ist eine Laurententwicklung um die Stelle $z_0 = 1$ gesucht, damit ist die Laurentreihe einfach $\frac{1}{z-1}$, d.h. nur $a_{-1} = 1$ und alle anderen a_n sind Null.

Der Kreisring R_2 ist um $z_0 = 0$ zentriert, wir müssen also f in Potenzen von z^n, $n \in \mathbb{Z}$, entwickeln. Dazu schreiben wir mit der geometrischen Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n.$$

In diesem Fall besteht die Laurentreihe also nur aus einem Hauptteil.

(b) Die Funktion f ist in 0 holomorph, also kann sie in einer Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelt werden, deren Term nullter Ordnung wegen $f(0) = -1 \neq 0$ nicht Null ist. Also ist $\omega_f(0) = 0$.

Genauso ist $\omega_f(2) = 0$.

Wir wenden uns also $\omega_f(1)$ zu. Zur Bestimmung dieser Nullstellenordnung benötigen wir eine Laurententwicklung von f um den Punkt $z_0 = 1$. Diese haben wir im Teil (a) zu

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

bestimmt, was $\omega_f(1) = -1$ bedeutet. Wir haben es also mit einem Pol erster Ordnung zu tun (was ja auch bei einem Blick auf die Funktion nicht wirklich überrascht).

(G 2)

Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0 und $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte $\omega_f(z_0) > -\infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt genau dann $\omega_f(z_0) = n$, wenn es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ gibt, für die $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z-z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt.

(b) $\omega_f(z_0) = -\omega_{1/f}(z_0)$ (vgl. den Beweis zu Satz IV.2.4).

(c) $\omega_{f\cdot g}(z_0) = \omega_f(z_0) + \omega_g(z_0)$.

LÖSUNG: (a) *Behauptung:* $\omega_f(z_0) = n \iff$ es gibt $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Da $\omega_f(z_0) = n$ gilt, gibt es einen Radius $r > 0$, so dass wir f auf dem Kreisring $R := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ durch eine Laurentreihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^k$$

mit $a_n \neq 0$ darstellen können. Setzen wir nun $h(z) := (z - z_0)^{-n} f(z)$, $z \in U \setminus \{z_0\}$, so ist $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^k$ für $z \in R$. Damit ist dieses eine in $B_r(z_0)$ konvergente Potenzreihe, also ist h auf dieser Menge holomorph. Weiter ist h als Produkt zweier holomorpher Funktionen auch auf $U \setminus B_r(z_0)$ holomorph, d.h. h ist auf ganz U holomorph. Weiter folgt aus der Potzenreihendarstellung $h(z_0) = a_{0+n} = a_n \neq 0$ und wir haben

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

„$\Leftarrow$" Da h in U holomorph ist, gibt es ein $r > 0$, so dass h in der Kugel $B_r(z_0)$ durch eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ dargestellt wird und dank $h(z_0) \neq 0$ wissen wir, dass $a_0 \neq 0$ ist. Damit gilt für alle $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n}(z - z_0)^k,$$

wobei der Summand für $k = n$ nicht verschwindet. Damit gilt $\omega_f(z_0) = n$.

(b) Es sei $n := \omega_f(z_0)$. Dann gibt es nach dem (a)-Teil eine auf U holomorphe Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Dank $h(z_0) \neq 0$ ist auch $1/h$ in einer Umgebung von z_0 holomorph mit $1/h(z_0) \neq 0$ und wir bekommen für alle z in dieser Umgebung

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n h(z)} = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{h(z)}.$$

Also ist wieder durch Anwendung von (a) $\omega_{1/f}(z_0) = -n = -\omega_f(z_0)$, wie gewünscht.

(c) Wir betrachten zunächst den Fall $\omega_g(z_0) > -\infty$. Dann gibt es nach (a) auf U holomorphe Funktionen h_f und h_g mit $h_f(z_0) \neq 0$ und $h_g(z_0) \neq 0$, sowie

$$f(z) = (z - z_0)^{\omega_f(z_0)} h_f(z) \quad \text{und} \quad g(z) = (z - z_0)^{\omega_g(z_0)} h_g(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Damit gilt für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ weiter

$$(f \cdot g)(z) = (z - z_0)^{\omega_f(z_0)} h_f(z)(z - z_0)^{\omega_g(z_0)} h_g(z) = (z - z_0)^{\omega_f(z_0) + \omega_g(z_0)} h_f(z) h_g(z).$$

Nun ist auch die Funktion $h := h_f \cdot h_g$ in U holomorph und es gilt $h(z_0) = h_f(z_0) \cdot h_g(z_0) \neq 0$. Also gilt nach dem (a)-Teil

$$\omega_{f \cdot g}(z_0) = \omega_f(z_0) + \omega_g(z_0).$$

Wir wenden uns also dem Fall $\omega_g(z_0) = -\infty$ zu und nehmen an, es wäre $\omega_{f \cdot g}(z_0) =: n > -\infty$. Da $g = (f \cdot g) \cdot 1/f$ ist, bekommen wir dann mit der Argumentation von oben und (b) sofort

$$\omega_g(z_0) = \omega_{(f \cdot g) \cdot 1/f}(z_0) = \omega_{f \cdot g}(z_0) + \omega_{1/f}(z_0) = \omega_{f \cdot g}(z_0) - \omega_f(z_0) > -\infty,$$

also einen Widerspruch.

(G 3)

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen

$$z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z - 1}$$

und ermitteln Sie, ob es sich jeweils um hebbare Singularitäten, Pole oder wesentliche Singularitäten handelt.

LÖSUNG: Problemstellen sind offensichtlich $z = 1$ im Exponenten des Zählers und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^z = 1$, d.h. alle Zahlen $2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Überall sonst ist die Funktion holomorph. Mit den Bezeichnungen

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z - 1}, \qquad g(z) := \mathrm{e}^{1/(z-1)} \quad \text{und} \quad u(z) := \mathrm{e}^z - 1$$

erhalten wir mit freundlicher Mithilfe von Aufgabe (G2) (c)

$$\omega_f(1) = \omega_g(1) + \omega_{1/u}(1).$$

Da u in 1 holomorph und $u(1) = \mathrm{e} - 1 \neq 0$ ist, wissen wir, dass auch $1/u$ in 1 holomorph ist mit $1/u(1) \neq 0$. Also ist $\omega_{1/u}(1) = 0$. Außerdem gilt für alle $z \in \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w-1| < 1/2\}$ (Man beachte, dass dieser Kreisring keine Zahl der Form $2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$ enthält)

$$g(z) = \mathrm{e}^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} (z-1)^n.$$

Also ist $\omega_g(1) = -\infty$ und damit auch $\omega_f(1) = -\infty$, d.h. in 1 liegt eine wesentliche Singularität vor.

Wir betrachten also noch die Stellen $z_k := 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \to z_k} \mathrm{e}^{1/(z-1)} \frac{z - 2k\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^z - 1} = \mathrm{e}^{1/(z_k - 1)} \lim_{z \to z_k} \frac{z - 2k\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{z - 2k\pi\mathrm{i}} - 1} = \mathrm{e}^{1/(z_k-1)} \lim_{z \to 0} \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Wir erinnern uns schnell an die Analysis I:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = 1.$$

Also ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \mathrm{e}^{1/(z_k - 1)} \neq 0.$$

Aus der Existenz obigen Grenzwertes folgt nun zunächst, dass $z \mapsto h(z) := (z - z_k) f(z)$ in einer Umgebung von z_k beschränkt ist, also ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz diese Funktion nach z_k holomorph fortsetzbar. Außerdem ist $h(z_k)$ durch obigen Grenzwert gegeben und damit nicht Null. Nach dem Kriterium in G2 (a) liegt somit in z_k ein einfacher Pol vor.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für für die Funktion

$$f(z) := \frac{z-4}{z(z+1)} e^{\frac{1}{z-4}}$$

alle isolierten Singularitäten und begründen Sie, um welche Art von Singularitäten es sich jeweils handelt.

(b) Bestimmen Sie die Laurentwicklung der Funktion

$$f(z) := \frac{\sin(z)}{z^3}$$

in ihren isolierten Singularitäten und begründen Sie, um welche Art von isolierten Singularitäten es sich jeweils handelt.

LÖSUNG: (a) Man sieht, dass isolierte Singularitäten in

$$z_0 := -1\,, \quad z_1 := 0\,, \quad z_2 := 4$$

vorliegen. Es gilt

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z-4}{z}e^{\frac{1}{z-4}} = -5e^{-\frac{1}{5}}.$$

Aus Bemerkung IV.2.5 folgt, dass in z_0 ein Pol 1. Ordnung vorliegt. Analog erhalten wir

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z-4}{z+1}e^{\frac{1}{z-4}} = -4e^{-\frac{1}{4}}.$$

Somit liegt in z_1 ebenfalls ein Pol 1. Ordnung vor. Nun untersuchen wir $z_2 = 4$. Setze

$$h_1(z) := \frac{1}{z(z+1)}\,, \quad h_2(z) := (z-4)e^{\frac{1}{z-4}}.$$

Es gilt für $z \neq 4$

$$h_2(z) = (z-4)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z-4})^n}{n!} = (z-4)(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-4)^{-n}}{n!}) = (z-4)+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-4)^{-n}}{(n+1)!}.$$

Damit ist $\omega_{h_2}(z_2) = -\infty$. Mit Ausgabe G2 folgt

$$\omega_{f_2}(z_2) = \omega_{h_1}(z_2) + \omega_{h_2}(z_2) = 0 - \infty = -\infty.$$

Somit besitzt f in z_2 einer wesentliche Singularität.

(b) Die einzige kritische Stelle ist $z = 0$. Wir erhalten für alle $z \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(z)}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-2}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n}}{(2n+3)!}.\end{aligned}$$

Damit liegt in $z = 0$ ein Pol 2. Ordnung vor.

(H 2) (6 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und besitze in z_0 eine wesentliche Singularität. Zeigen Sie

$$\lim_{r\to 0} r^k \sup\{\, |f(z)|; z \in \mathbb{C}; |z-z_0| = r \,\} = \infty$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Lösung: Angenommen dies falsch. Man findet somit ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von absteigenden Radien $r_1 > r_2 > \ldots$ und eine Konstante $K > 0$ mit

$$r_n^k \sup\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r_n\} \leq K$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Sei $A_n := \{ z \in \mathbb{C}; r_{n+1} \leq |z - z_0| \leq r_n \}$ der abgeschlossene Kreisring mit den Radien r_{n+1} und r_n. Das Maximum-Prinzip, angewandt auf die in $U \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$ liefert

$$|z - z_0|^k |f(z)| \leq K \quad \forall z \in A_n.$$

Insgesamt folgt, dass $|z - z_0|^k |f(z)| \leq K$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z - z_0| < r_1$. Nach dem Riemannsachen Hebbarkeitssatz (Satz IV.2.3) kann $z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$ holomorph in z_0 fortgestzt werden. Dies stellt jedoch einen Widerspruch dazu dar, dass f in z_0 eine wesentliche Singularität besitzt.

(H 3) (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in z_0 einen Pol 1. Ordnung hat. Dann besitzt e^f eine wesentliche Singularität in z_0.

Bemerkung. Die Aussage bleibt gültig, falls f in z_0 einen Pol beliebiger Ordung besitzt, ist aber schwerer zu beweisen.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann existieren für jedes $z_0 \in U$ zwei auf einer offenen Umgebung V von z_0 holomorphe Funktionen g, h, so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad z \in V,$$

gilt.

Lösung: (a) Laurententwicklung liefert: Es gilt in einer Umgebung V von z_0

$$f(z) = a_{-1}\frac{1}{z} + f_2(z), z \in V \setminus \{z_0\}$$

mit einer in V holomorphen Funktion f_2. Sei $f_1(z) := a_{-1}\frac{1}{z}$ der Hauptteil dieser Laurententwicklung. Für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$ gilt

$$e^{f(z)} = e^{f_1(z)+f_2(z)} = e^{f_1(z)}e^{f_2(z)}$$

und mit Aufgabe G2 folgt für $h(z) := e^{f(z)}$

$$\omega_{e^f}(z_0) = \omega_{e^{f_1}}(z_0) + \omega_{e^{f_2}}(z_0) = \omega_{e^{f_1}}(z_0), \tag{1}$$

da $z \mapsto e^{f_2(z)}$ in z_0 holomorph ist. Für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$ gilt

$$e^{f_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_{-1}\frac{1}{z})^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{-1})^n \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Somit besitzt e^{f_1} in z_0 eine wesentliche Singularität und mit (1) folgt $\omega_{e^f}(z_0) = -\infty$, d.h. e^f besitzt in z_0 eine wesentliche Singularität.

(b) Falls f in z_0 holomorph ist, wähle $h := 1$ und $g := f$. Ansonsten besitzt f in z_0 einen Pol k ter Ordnung mit einem $k \in \mathbb{N}$. Damit ist (siehe Bemerkung IV.2.5) $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ eine in einer Umgebung V von z_0 holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$. Es ist mit $h(z) := (z - z_0)^n$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

für alle $z \in V$ eine gesuchte Darstellung von f.