Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 26./27.1.2010

Analysis III – Funktionentheorie

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

(a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f im Kreisring $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$ und im Kreisring $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$

(b) Bestimmen Sie weiter $\omega_f(0)$, $\omega_f(1)$ und $\omega_f(2)$.

(G 2)

Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0 und $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte $\omega_f(z_0) > -\infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt genau dann $\omega_f(z_0) = n$, wenn es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ gibt, für die $h(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ gilt.

(b) $\omega_f(z_0) = -\omega_{1/f}(z_0)$ (vgl. den Beweis zu Satz IV.2.4).

(c) $\omega_{f\cdot g}(z_0) = \omega_f(z_0) + \omega_g(z_0)$.

(G 3)

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen

$$z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z - 1}$$

und ermitteln Sie, ob es sich jeweils um hebbare Singularitäten, Pole oder wesentliche Singularitäten handelt.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für für die Funktion

$$f(z) := \frac{z-4}{z(z+1)} e^{\frac{1}{z-4}}$$

alle isolierten Singularitäten und begründen Sie, um welche Art von Singularitäten es sich jeweils handelt.

(b) Bestimmen Sie die Laurentwicklung der Funktion

$$f(z) := \frac{\sin(z)}{z^3}$$

in ihren isolierten Singularitäten und begründen Sie, um welche Art von isolierten Singularitäten es sich jeweils handelt.

(H 2) (6 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und besitze in z_0 eine wesentliche Singularität. Zeigen Sie

$$\lim_{r \to 0} r^k \sup\{\, |f(z)|; z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r \,\} = \infty$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

(H 3) (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in z_0 einen Pol 1. Ordnung hat. Dann besitzt e^f eine wesentliche Singularität in z_0.
Bemerkung. Die Aussage bleibt gültig, falls f in z_0 einen Pol beliebiger Ordung besitzt, ist aber schwerer zu beweisen.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Dann existieren für jedes $z_0 \in U$ zwei auf einer offenen Umgebung V von z_0 holomorphe Funktionen g, h, so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad z \in V,$$

gilt.