Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert-Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 12./13.1.2010

Analysis III – Funktionentheorie

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(z) := \frac{3}{(z+1)(z-2)}\,, \quad 1 < |z| < 2\,,$$

die in Lemma IV.1.1 angegebenen Funktionen f_1 , f_2. Geben Sie anschließend die in Theorem IV.1.2 angegebene Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}\,, \quad 1 < |z| < 2\,,$$

an.

Hinweis. Man kann $f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}$ für geeignete A und B schreiben.

Lösung: Der Ansatz aus dem Hinweis führt auf

$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}.$$

Multiplizieren wir mit $(z+1)(z-2)$ durch, erhalten wir $3 = A(z-2) + B(z+1)$, was uns durch Einsetzen von $z = 2$ bzw. $z = -1$ die Lösung $A = -1$ und $B = 1$ liefert. Es gilt also

$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}.$$

Wir setzen

$$f_1(z) := \frac{1}{z+1} \quad \text{und} \quad f_2(z) := \frac{1}{z-2}.$$

Damit ist f_1 holomorph in $\{ z \in \mathbb{C}; |z| > 1 \}$, f_2 ist holomorph in $\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 2 \}$ und es gilt die Zerlegung $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$ für alle $1 < |z| < 2$. Wir formen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $1 < |z| < 2$ um:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{(z+1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2} - 1} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{z})} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z}{2}\Big)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-(n+1)} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-(n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-(n+1)} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-n}.
\end{aligned}$$

(G 2)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so dass für jeden Punkt $z \in G$ die gesamte Verbindungsstrecke von z und z_0 ganz in G liegt, d.h. für jedes $z \in G$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda z_0 + (1-\lambda)z \in G$. Man sagt dann „$G$ ist bezüglich z_0 sternförmig".

(a) Zeigen Sie, dass jedes konvexe Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig ist.

(b) Es sei G ein sternförmiges Gebiet bezüglich $z_0 \in G$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$. Beweisen Sie, dass γ nullhomotop in G ist.

Bemerkung: Tatsächlich gilt das für jeden geschlossen Integrationsweg in einem sternförmigen Gebiet, d.h. jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend. Die Voraussetzung $\gamma(a) = z_0$ macht den Beweis jedoch deutlich übersichtlicher.

(c) Es gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G und jede in G holomorphe Funktion f

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Sie dürfen dabei verwenden, dass jeder in G nullhomotope Integrationsweg auch nullhomolog ist.

LÖSUNG: (a) Sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in G$ beliebig gewählt. Für jedes $z \in G$ ist dann die Verbindungsstrecke $z_0 + \lambda(z - z_0)$, $\lambda \in [0,1]$, in G enthalten, da G konvex ist. Also ist G sternförmig bezüglich z_0.

(b) Wir zeigen nun, dass jeder Integrationsweg γ in G mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$ nullhomotop ist. Dazu betrachte die Abbildung $\psi : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\psi(t,s) = (1-s)\gamma(t) + sz_0, \quad t \in [a,b],\ s \in [0,1].$$

Dann ist ψ offensichtlich stetig. Weiter ist für jedes festgehaltene $t \in [a,b]$ der Punkt $\gamma(t)$ nach Voraussetzung in G. Betrachtet man nun die Abbildung $s \mapsto \psi(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sz_0$, so ist deren Bild für $s \in [0,1]$ genau die Verbindungslinie von z_0 und $\gamma(t)$. Nun ist G sternförmig bezüglich z_0, d.h. diese Verbindungslinie gehört vollständig zu G. Das bedeutet, dass $\psi(t,s) \in G$ für alle $t \in [a,b]$ und alle $s \in [0,1]$ gilt.

Damit ist ψ eine stetige Abbildung von $[a,b] \times [0,1]$ nach G und es gilt

$$\begin{aligned}
&\psi(t,0) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in [a,b],\\
&\psi(t,1) = z_0 \quad \text{für alle } t \in [a,b],\\
&\psi(a,s) = (1-s)\gamma(a) + sz_0 = (1-s)z_0 + sz_0 = z_0 \quad \text{für alle } s \in [0,1],\\
&\psi(b,s) = (1-s)\gamma(b) + sz_0 = (1-s)z_0 + sz_0 = z_0 \quad \text{für alle } s \in [0,1].
\end{aligned}$$

Nach Definition III.2.6 b) ist damit γ nullhomotop.

(c) Mit dem Hinweis in der Aufgabenstellung folgt, dass γ nullhomolog in G ist. Der globale Cauchysche Integralsatz liefert

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(G 3)

Es sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ beschränkt. Wir betrachten das reelle uneigentliche Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Integral existiert und $I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t$ gilt.

(b) Sei für $r > 1$

$$\gamma_{r,1}(t) = t, \quad t \in [-r, r] \qquad \text{und} \qquad \gamma_{r,2}(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, \pi],$$

sowie $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z.$$

(c) Folgern Sie nun $I = \pi \cdot h(\mathrm{i})$.

(d) Bestimmen Sie damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG: (a) Wir beobachten zunächst, dass das Integral wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{h(t)}{1+t^2} \right| \mathrm{d}t \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

absolut konvergent ist. Deshalb gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Sei $r > 1$. Der Weg γ_r beschreibt den einmal positiv durchlaufenen Rand des Halbkreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, insbesondere ist γ_r ein geschlossener Weg in $G := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > -1/2\}$. Weiter ist dieser offensichtlich nullhomolog in G und die Funktion $f(z) := h(z)/(z+\mathrm{i})$ ist holomorph in G. Mit der Cauchy-Integralformel aus Satz III.2.4 b), angewandt auf f und mit $n = 0$, gilt dann

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{0!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} I(\gamma_r, \mathrm{i}) f(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i} \cdot 1 \cdot \frac{h(\mathrm{i})}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \pi h(\mathrm{i}).$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert beobachten wir zunächst

$$\left| \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \right| \leq L(\gamma_{r,2}) \max_{z\in\mathrm{Spur}(\gamma_{r,2})} \frac{|h(z)|}{|1+z^2|} \leq \pi r C \max_{z\in\mathrm{Spur}(\gamma_{r,2})} \frac{1}{|1+z^2|},$$

wobei $C := \sup\{|h(z)| : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ ist.

Es gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $z \in \mathrm{Spur}(\gamma_{r,2})$

$$|1+z^2| = |z^2 - (-1)| \geq |z^2| - 1 = |z|^2 - 1 = r^2 - 1, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{r^2-1}.$$

Zusammen mit obiger Abschätzung liefert das

$$\left| \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} \right| \leq C\pi r \frac{1}{r^2-1} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty).$$

Also gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2} = 0.$$

(c) Mit den Ergebnissen aus (a) und (b) erhalten wir

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} \left[\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2}\, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2}\, \mathrm{d}z \right]$$

$$= \lim_{r\to\infty} \pi \cdot h(\mathrm{i}) - \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2}\, \mathrm{d}z = \pi \cdot h(\mathrm{i}) - 0 = \pi \cdot h(\mathrm{i}).$$

(d) Der Kosinus ist bekanntermaßen auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph aber leider nicht auf der oberen Halbebene beschränkt. Daher schreiben wir das Integral noch ein bisschen um:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right),$$

wobei wir im zweiten Schritt die Stetigkeit der Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ genutzt haben.

Nun ist auch die Funktion $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und da aus $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Im}(z)} \leq 1$$

folgt, ist sie auch auf der oberen Halbebene beschränkt. Wir können also im obigen Teil der Aufgabe $h(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ setzen und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right) = \mathrm{Re}(\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}) = \mathrm{Re}(\pi \mathrm{e}^{-1}) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$. Mit M werde die Menge aller Zyklen in G bezeichnet. Für $\gamma_0, \gamma_1 \in M$ schreiben wir $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls γ_0 zu γ_1 homolog ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Sei $[\gamma]$ die Äquivalenzklasse von $\gamma \in M$ bezüglich $\sim$ also

$$[\gamma] = \{\, \gamma_0 \in M; \gamma \sim \gamma_0 \,\}.$$

Sei $\ddot{\mathrm{A}}\mathrm{q}(M) = \{\, [\gamma]; \gamma \in M \,\}$ die Menge aller Äquivalezklassen. Wir definieren eine Abbildung $\ddot{\mathrm{A}}\mathrm{q}(M) \times \ddot{\mathrm{A}}\mathrm{q}(M) \to \ddot{\mathrm{A}}\mathrm{q}(M)$ wie folgt:

$$[\gamma_0] + [\gamma_1] := [\gamma_0 + \gamma_1]\,, \tag{1}$$

wobei $\gamma_0, \gamma_1 \in M$. Dabei bezeichnet $\gamma_0 + \gamma_1$ den wie im Skript erklärten Zyklus $\gamma_0 + \gamma_1$.

(i) Zeigen Sie, dass die in (1) erklärte Addition wohldefiniert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $V := (\ddot{\mathrm{A}}\mathrm{q}(M), +)$ mit der in (1) erklärten Addition eine Gruppe bildet. Geben Sie das neutrale Element dieser Gruppe an und bestimmen Sie zu $\gamma \in V$ das inverse Element.

LÖSUNG: (a) Es gilt $\gamma_0 \sim \gamma_1$ für $\gamma_0, \gamma_1 \in M$ genau dann, wenn

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$ ist. Die Reflexivität und die Symmetrie von $\sim$ sind unmittelbar klar. Für den Nachweis der Transitivität betrachten wir $\gamma_0 \sim \gamma_1, \gamma_1 \sim \gamma_2$. Es folgt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus G$

$$\int_{\gamma_0 - \gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_0 - \gamma_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 + 0 = 0$$

und damit auch $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

(b) Zum Beweis der Wohldefiniertheit ist folgendes zu zeigen: Falls $\gamma_0 \sim \gamma_0'$ und $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, dann gilt $\gamma_0 + \gamma_1 \sim \gamma_0' + \gamma_1'$. Für beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus G$ folgt aus der Rechnung

$$\int_{(\gamma_0+\gamma_1)-(\gamma_0'+\gamma_1')} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_0-\gamma_0'} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{\gamma_1-\gamma_1'} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 + 0 = 0.$$

Die Assoziativität von $+$ in V ist klar. Angenommen, es gilt $\gamma_0 + \gamma' = \gamma_0$ mit $\gamma_0\,, \gamma' \in M$. Dann gilt

$$\int_{\gamma'} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G.$$

Dies bedeutet, dass γ' nullhomolog in G ist. Wir definieren $\tilde{\gamma}(t) := z_0$ für $t \in [0, 1]$, wobei $z_0 \in G$ ist. Damit ist $\tilde{\gamma}$ nullhomolog in G. Die Äquivalenzklasse $[\tilde{\gamma}]$ besteht gerade aus alllen nullhomologen Zyklen in G und ist das Nullelement in V, da $\gamma + \tilde{\gamma} = \gamma$ in V für alle $\gamma \in V$ gilt. Da für beliebiges $\gamma \in M$ der Zyklus $\gamma + (-\gamma)$ stets nullhomolog ist, ist für beliebiges $\gamma \in M$ das inverse Elemt zu $[\gamma]$ gegeben durch $[-\gamma]$.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(z) := e^{\frac{1}{z}}\,, \quad 0 < |z| < \infty\,,$$

die in Lemma IV.1.1 angegebenen Funktionen $f_1\,, f_2$. Geben Sie anschließend die in Theorem IV.1.2 angegebene Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z_- z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}\,, \quad 0 < |z| < \infty\,,$$

an.

(b) Führen Sie die gleiche Aufgabenstellung wie in Teil a mit der Funktion

$$g(z) := \frac{1}{z^2(z+i)}\,, \quad 0 < |z + i| < 1\,,$$

durch.

Lösung: Wir beginnen mit der Funktion f. Sei f_2 die in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f_2(z) := 1$. Diese Funktion ist holomorph in $\mathbb{C}$. Die Funktion $f_1(z) := 1 - e^{\frac{1}{z}}$ ist holomorph für $|z| > 0$ und es gilt $f_1(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Da $f(z) = f_2(z) - f_1(z)$ für alle $|z| > 0$ haben wir die in Lemma IV.1.1 angegbenen Zerlegung gefunden. Es ist

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

für alle $|z| > 0$. Nun zur Funktion g. Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{z^2(z+i)} = \frac{1}{z} + \frac{-i}{z^2} + \frac{-1}{z+i}.$$

Die Funktion

$$f_1(z) := \frac{1}{z+i}$$

ist holomorph in $\{\, z \in \mathbb{C}; |z + i| > 0 \,\}$ und es gilt $f_1(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Weiterhin ist

$$f_2(z) := \frac{1}{z} + \frac{-i}{z^2}$$

holomorph in $\{ z \in \mathbb{C}; |z+i| < 1 \}$. Damit liefert $g(z) = f_2(z) - f_1(z)$ für $z \in \{ z \in \mathbb{C}; 0 < |z+i| < 1 \}$ die in Lemma IV.1.1 angebenene Zerlegung. Wir entwickeln nun f_2 in eine auf $D_2 := \{ z \in \mathbb{C}; |z+i| < 1 \}$ konvergente Potenzreihe. Für beliebiges $z \in D_2$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{i}{1-(-i)(z+i)} = i\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(z+i)^n.$$

Für beliebiges $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$ ist

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n.$$

Durch Differenzieren folgt für $|w| < 1$

$$-\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1}.$$

Man erhält für $z \in D_2$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{-1}{(1-(-i)(z+i))^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-i)^{n-1}(z+i)^{n-1}.$$

Damit erhalten wir für alle $z \in \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z+i| < 1\}$

$$\begin{aligned} f(z) = f_2(z) - f_1(z) &= \frac{-1}{z+i} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n(z+i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(-i)^{n-1}(z+i)^{n-1} \\ &= \frac{-1}{z+i} + \sum_{n=0}^{\infty}((-i)^{n+1} + (n+1)(-i)^n)(z+i)^n. \end{aligned}$$

(H 3) (6 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ reelle Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Falls die beiden Grenzwerte

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

existieren, definieren wir

$$L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Man nennt L *Laurentreihe*.

(a) Zeigen Sie: Es existieren $0 \le R_1 \le \infty$ und $0 \le R_2 \le \infty$, so dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut und lokal gleichmäßig auf $D_{R_1,R_2}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C}; R_1 < |z-z_0| < R_2 \}$ gegen eine in $D_{R_1,R_2}(z_0)$ holomorphe Funktion f konvergiert. Weiterhin soll $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R_1$ oder $|z-z_0| > R_2$ divergieren. Dabei ist Konvergenz jeweils als Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ zu verstehen.

(b) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 < r < R < \infty$. Geben Sie eine Laurentreihe an, die auf

$$\{ z \in \mathbb{C}; r < |z-z_0| < R \}$$

konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < r$ oder $|z-z_0| > R$ divergiert.

LÖSUNG: (a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ besitzt einen Konvergenzradius $R_2 \in [0,\infty]$. Nun wird $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ betrachtet. Definiere $g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe werde mit $\frac{1}{R_1} \in [0,\infty]$ bezeichnet. Somit ist g auf $\{ z \in \mathbb{C}; |z| < \frac{1}{R_1} \}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergent und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Für alle $|z-z_0| > R_1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = g(\frac{1}{z-z_0})$. Insgesamt folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ für alle $|z-z_0| > R_1$ absolut gegen eine holomorphe Funktion konvergiert und für alle $|z-z_0| < R_1$ divergiert. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $\{ z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > R_3 \}$ für alle $R_3 > R_1$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{R^n}$ hat als Konvergenzkreis $\{ z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < R \}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r^n z^n$ hat als Konvergenzkreis $\{ z \in \mathbb{C}; |z| < \frac{1}{r} \}$. Daraus folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} r^n(z-z_0)^{-n}$ für alle $|z-z_0| > r$ konvergiert und für alle $|z-z_0| < r$ divergiert. Die Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{R^n} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(z-z_0)^{-n}$$

besitzt die in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften.