Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert-Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 12./13.1.2010

Analysis III – Funktionentheorie

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(z) := \frac{3}{(z+1)(z-2)}\,, \quad 1 < |z| < 2\,,$$

die in Lemma IV.1.1 angegebenen Funktionen f_1 , f_2. Geben Sie anschließend die in Theorem IV.1.2 angegebene Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}\,, \quad 1 < |z| < 2\,,$$

an.
Hinweis. Man kann $f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}$ für geeignete A und B schreiben.

(G 2)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so dass für jeden Punkt $z \in G$ die gesamte Verbindungsstrecke von z und z_0 ganz in G liegt, d.h. für jedes $z \in G$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda z_0 + (1-\lambda)z \in G$. Man sagt dann „$G$ ist bezüglich z_0 sternförmig".

(a) Zeigen Sie, dass jedes konvexe Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig ist.

(b) Es sei G ein sternförmiges Gebiet bezüglich $z_0 \in G$, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg mit $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0$. Beweisen Sie, dass γ nullhomotop in G ist.

Bemerkung: Tatsächlich gilt das für jeden geschlossen Integrationsweg in einem sternförmigen Gebiet, d.h. jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend. Die Voraussetzung $\gamma(a) = z_0$ macht den Beweis jedoch deutlich übersichtlicher.

(c) Es gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G und jede in G holomorphe Funktion f

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Sie dürfen dabei verwenden, dass jeder in G nullhomotope Integrationsweg auch nullhomolog ist.

(G 3)

Es sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf der abgeschlossenen oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ beschränkt. Wir betrachten das reelle uneigentliche Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Integral existiert und $I = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{h(t)}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t$ gilt.

(b) Sei für $r > 1$

$$\gamma_{r,1}(t) = t, \quad t \in [-r, r] \qquad \text{und} \qquad \gamma_{r,2}(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, \pi],$$

sowie $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} \frac{h(z)}{1+z^2}\,\mathrm{d}z.$$

(c) Folgern Sie nun $I = \pi \cdot h(\mathrm{i})$.

(d) Bestimmen Sie damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$. Mit M werde die Menge aller Zyklen in G bezeichnet. Für $\gamma_0, \gamma_1 \in M$ schreiben wir $\gamma_0 \sim \gamma_1$, falls γ_0 zu γ_1 homolog ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

(b) Sei $[\gamma]$ die Äquivalenzklasse von $\gamma \in M$ bezüglich $\sim$ also

$$[\gamma] = \{\, \gamma_0 \in M; \gamma \sim \gamma_0 \,\}.$$

Sei $\text{Äq}(M) = \{\, [\gamma]; \gamma \in M \,\}$ die Menge aller Äquivalezklassen. Wir definieren eine Abbildung $\text{Äq}(M) \times \text{Äq}(M) \to \text{Äq}(M)$ wie folgt:

$$[\gamma_0] + [\gamma_1] := [\gamma_0 + \gamma_1]\,, \tag{1}$$

wobei $\gamma_0, \gamma_1 \in M$. Dabei bezeichnet $\gamma_0 + \gamma_1$ den wie im Skript erklärten Zyklus $\gamma_0 + \gamma_1$.

(i) Zeigen Sie, dass die in (1) erklärte Addition wohldefiniert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $V := (\text{Äq}(M), +)$ mit der in (1) erklärten Addition eine Gruppe bildet. Geben Sie das neutrale Element dieser Gruppe an und bestimmen Sie zu $\gamma \in V$ das inverse Element.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(z) := e^{\frac{1}{z}}\,, \quad 0 < |z| < \infty\,,$$

die in Lemma IV.1.1 angegebenen Funktionen f_1, f_2. Geben Sie anschließend die in Theorem IV.1.2 angegebene Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z_-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}, \quad 0 < |z| < \infty,$$

an.

(b) Führen Sie die gleiche Aufgabenstellung wie in Teil a mit der Funktion

$$g(z) := \frac{1}{z^2(z+i)}, \quad 0 < |z+i| < 1,$$

durch.

(H 3) (6 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ reelle Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Falls die beiden Grenzwerte

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

existieren, definieren wir

$$L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Man nennt L *Laurentreihe.*

(a) Zeigen Sie: Es existieren $0 \leq R_1 \leq \infty$ und $0 \leq R_2 \leq \infty$, so dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut und lokal gleichmäßig auf $D_{R_1,R_2}(z_0) := \{\, z \in \mathbb{C}; R_1 < |z-z_0| < R_2 \,\}$ gegen eine in $D_{R_1,R_2}(z_0)$ holomorphe Funktion f konvergiert. Weiterhin soll $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < R_1$ oder $|z-z_0| > R_2$ divergieren. Dabei ist Konvergenz jeweils als Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ zu verstehen.

(b) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 < r < R < \infty$. Geben Sie eine Laurentreihe an, die auf

$$\{\, z \in \mathbb{C}; r < |z-z_0| < R \,\}$$

konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < r$ oder $|z-z_0| > R$ divergiert.