Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 8./9.12.2009

Analysis III – Funktionentheorie

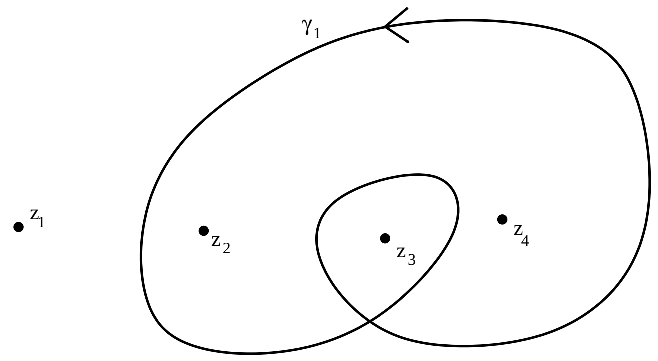
5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

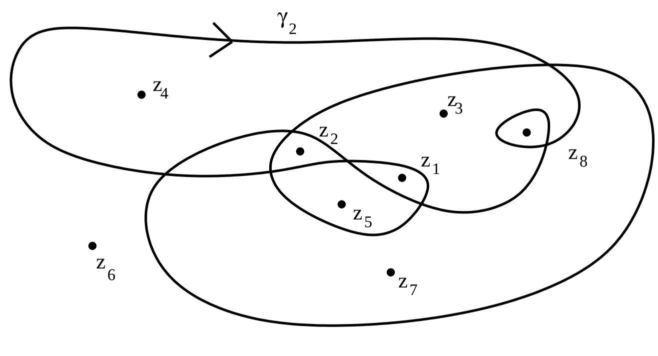
(G 1)

Bestimmen Sie die Umlaufszahl für die Punkte in der Skizze bezüglich der angegebenen Wege γ_1 bzw. γ_2.

(a) Weg γ_1:



(b) Weg γ_2:



Lösung: (a)

i	1	2	3	4
$I(\gamma_1, z_i)$	0	1	2	1

(b)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$I(\gamma_1, z_i)$	1	1	0	-1	2	0	1	-1

(G 2)

(a) Wir schreiben $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - 3x + y^2$ gilt?

(b) Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$ auf G. Zeigen Sie, dass dann eine reelle Zahl c existiert mit $f(z) = g(z) + c\mathrm{i}$ für alle $z \in G$.

LÖSUNG: (a) Eine solche Funktion kann es nicht geben, denn nach Satz 5.6 ist der Realteil jeder holomorphen Funktion harmonisch. Für $g(x, z) = \mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - 3x + y^2$ gilt aber

$$\Delta g(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

(b) *1. Beweis (für Theorie-Liebhaber):* Wir betrachten $h := f - g$. Dann ist auch h in G holomorph und es gilt $\mathrm{Re}(h(z)) = \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(g(z)) = 0$ für alle $z \in G$. Also ist $h(G) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$. Nun enthält die imaginäre Achse aber, außer der leeren Menge, keine Gebiete. Also muss nach dem Satz über die Gebietstreue die Funktion h konstant sein. Damit gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c\mathrm{i} = h(z) = f(z) - g(z)$ für alle $z \in G$, woraus die Behauptung folgt.

2. Beweis (für Freunde des Rechnens): Es seien $u, v, w : G \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(g(z))$, sowie $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$ und $w(z) = \mathrm{Im}(g(z))$. Dann gilt $f = u + v\mathrm{i}$ und $g = u + w\mathrm{i}$. Da f und g holomorph sind, haben wir nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} v_y(z) &= u_x(z) = w_y(z), \quad \text{d.h. } v_y = w_y \quad \text{und} \\ v_x(z) &= -u_y(z) = w_x(z), \quad \text{d.h. } v_x = w_x. \end{aligned}$$

Damit haben v und w identische partielle Ableitungen, d.h. es gibt eine reelle Konstante c mit $v(z) = w(z) + c$ für alle $z \in G$ und damit auch $f(z) = u(z) + v(z)\mathrm{i} = u(z) + (w(z) + c)\mathrm{i} = g(z) + c\mathrm{i}$ für alle $z \in G$.

(G 3)

Für $a, b \in (0, \infty)$ sei $R := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < a,\ |\mathrm{Im}\, z| < b\}$ ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ und γ sei die Kurve, die den Rand von R in mathematisch positivem Sinne durchläuft. Zeigen Sie, dass für die Umlaufszahl $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ gilt:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & : \quad z \in R, \\ 0 & : \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{R}. \end{cases}$$

LÖSUNG: Falls $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{R}$ ist die Funktion $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ in einer konvexen Umgebung von $\overline{R}$ holomorph und somit folgt mit dem Cauchschen Integralsatz für konvexe Gebiete

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

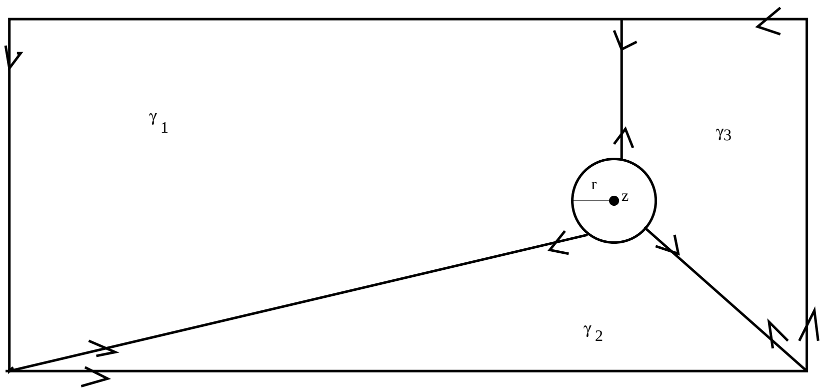
Sei nun $z \in R$. Wir wählen eine hinreichend kleine Kugel $B_r(z)$ um z und geschlossene, einfach durchlaufene positiv orientierte Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ wie in der unteren Skizze:

Man sieht, dass $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ geschlossene Integrationswege sind, die in einer konvexe Holomorphieumgebung der Funktion $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ liegen. Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete liefert

$$\int_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

für jedes $i = 1, 2, 3$. Da sich die Integrale über die Verbindungsstrecken jeweils aufheben, folgt

$$0 = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{-\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.$$



Man erhält

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i.$$

(Die Umlaufszahl eines Kreises ist bekannt.) Also ist $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 1$.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Sei $D = B_1(0)$. Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in D harmonisch, wenn sie die Mittelwerteigenschaft in D besitzt.

Lösung: Dass eine harmoische Funktion die Mittelwerteigenschaft besitzt, ist die Aussage von Satz II.5.10. Wir nehmen nun an, dass f die Mittelwerteigenschaft besitzt. Aufgrund von Theorem II.5.14 findet man eine eine stetige Funktion $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$, die das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} (\Delta u)(z) = 0\,, & z \in D\,, \\ u(z) = f(z)\,, & z \in \partial D \end{cases}$$

löst. Die Funktion $f - u$ ist stetig auf $\overline{D}$ und genügt auf D der Mittelwerteigenschaft. Anwendung des Maximum- und Minimumprinzips (Satz II.5.11) liefert, dasss $f - u$ sowohl sein Maximum- als auch sein Minimum in $\overline{D}$ auf dem Rand ∂D animmt. Da $f - u = 0$ auf ∂D ist, erhalten wir $f(z) = u(z)$ für alle $z \in \overline{D}$. Somit ist f in D harmonisch.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Sei $D = B_1(0)$ und sei $f_n : \overline{D} \to \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen, die auf D harmonisch ist und auf $\overline{D}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f harmonisch in D ist.

(b) Finden Sie ein unbeschränktes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und eine auf ∂G stetige Funktion g , so dass die auf $\overline{G}$ stetigen Lösungen u des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} (\Delta u)(z) = 0\,, & z \in G\,, \\ u(z) = g(z)\,, & z \in \partial G \end{cases}$$

nicht eindeutig sind.

Lösung: (a) Aufgrund von Satz 5.13.a) gilt für alle $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}$ die Darstellung

$$f_n(z) = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) f_n(e^{i\theta})\, d\theta\,,$$

wobei P den Poissonkern auf dem Einheitskreis bezeichnet. Da $f_n\,, n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen ist, die auf $\overline{D}$ gleichmäßig konvergiert, ist die Grenzfunktion $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig. Da wir insbesondere gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f auf ∂D haben, können wir Integration und Limesbildung vertauschen und erhalten für beliebiges $z \in D$

$$\begin{aligned} f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) f_n(e^{i\theta})\, d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} P(e^{i\theta}, z) f_n(e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z) f(e^{i\theta})\, d\theta. \end{aligned}$$

Nach Satz II.5.13b) ist f in D harmonisch.

(b) Wir betrachten das Gebiet $G := \{\, z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0 \,\}$, also die rechte Halbebene. Die beiden Funktionen $u(x,y) := 0$ und $v(x,y) := x$ sind in G harmonisch und stimmen auf dem Rand von G, der imaginären Achse, überein. Somit sind die Lösungen des Dirichlet-Problems auf G nicht eindeutig bestimmt.

(H 3) (6 Punkte)

Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Dreick, dessen Rand $\partial\Delta$ im mathematisch positiv orientierten Sinne durchlaufen werde. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial\Delta$

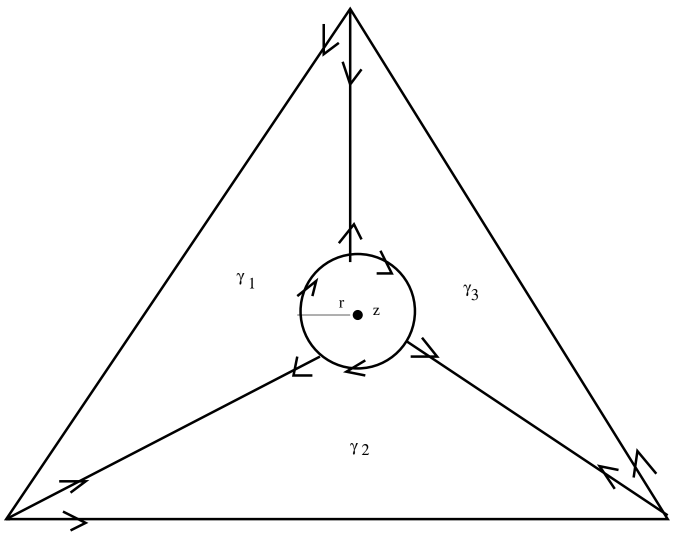
$$\mathrm{Ind}(\partial\Delta, z) = \begin{cases} 1\,, & z \in \Delta\,, \\ 0\,, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \end{cases}$$

gilt.

LÖSUNG: Falls $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}$ ist die Funktion $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ in einer konvexen Umgebung von $\overline{\Delta}$ holomorph und somit folgt mit dem Cauchschen Integralsatz für konvexe Gebiete

$$\mathrm{Ind}(\partial\Delta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Sei nun $z \in \Delta$. Wir wählen eine hinreichend kleine Kugel $B_r(z)$ um z und geschlossene, einfach durchlaufene positiv orientierte Wege $\gamma_1\,, \gamma_2\,, \gamma_3$ wie in der unteren Skizze:



Man sieht, dass $\gamma_1\,, \gamma_2\,, \gamma_3$ geschlossene Integrationswege sind, die in einer konvexe Holomorphieumgebung der Funktion $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ liegen. Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete liefert

$$\int_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

für jedes $i = 1, 2, 3$. Da sich die Integrale über die Verbindungsstrecken jeweils aufheben, folgt

$$0 = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{-\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Man erhält

$$\int_{\partial\Delta} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i.$$

(Die Umlaufszahl eines Kreises ist bekannt.) Also ist $\mathrm{Ind}(\partial\Delta, z) = 1$.