Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 8./9.12.2009

Analysis III – Funktionentheorie

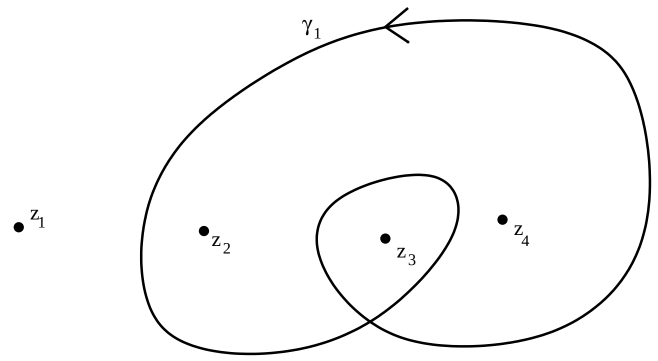
5. Übung

Gruppenübungen

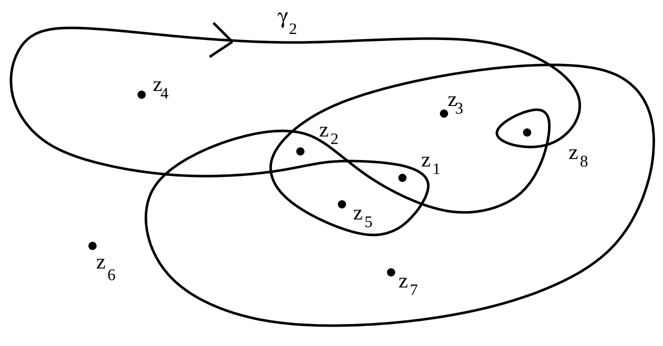
(G 1)

Bestimmen Sie die Umlaufszahl für die Punkte in der Skizze bezüglich der angegebenen Wege γ_1 bzw. γ_2.

(a) Weg γ_1:



(b) Weg γ_2:



(G 2)

(a) Wir schreiben $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, für die $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - 3x + y^2$ gilt?

(b) Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$ auf G. Zeigen Sie, dass dann eine reelle Zahl c existiert mit $f(z) = g(z) + ci$ für alle $z \in G$.

(G 3)

Für $a, b \in (0, \infty)$ sei $R := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < a,\ |\mathrm{Im}\, z| < b\}$ ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ und γ sei die Kurve, die den Rand von R in mathematisch positivem Sinne durchläuft. Zeigen Sie, dass für die Umlaufszahl $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ gilt:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \begin{cases} 1 & : \quad z \in R, \\ 0 & : \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{R}. \end{cases}$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Sei $D = B_1(0)$. Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in D harmonisch, wenn sie die Mittelwerteigenschaft in D besitzt.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Sei $D = B_1(0)$ und sei $f_n : \overline{D} \to \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen, die auf D harmonisch ist und auf $\overline{D}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f harmonisch in D ist.

(b) Finden Sie ein unbeschränktes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und eine auf ∂G stetige Funktion g , so dass die auf $\overline{G}$ stetigen Lösungen u des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} (\Delta u)(z) = 0\,, & z \in G\,, \\ u(z) = g(z)\,, & z \in \partial G \end{cases}$$

nicht eindeutig sind.

(H 3) (6 Punkte)

Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Dreick, dessen Rand $\partial\Delta$ im mathematisch positiv orientierten Sinne durchlaufen werde. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial\Delta$

$$\mathrm{Ind}(\partial\Delta, z) = \begin{cases} 1\,, & z \in \Delta\,, \\ 0\,, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \end{cases}$$

gilt.