Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 24./25.11.2009

Analysis III – Funktionentheorie

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine holomorphe Funktion auf G, die nicht konstant ist.

(a) In $z_0 \in G$ habe $|f|$ ein lokales Minimum. Zeigen Sie, dass dann $f(z_0) = 0$ gilt.

(b) Das Gebiet G sei beschränkt, und f habe eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$. In G habe f keine Nullstellen. Zeigen Sie, dass dann $|\tilde{f}|$ sein Minimum auf dem Rand ∂G annimmt.

(c) *Zusatzaufgabe:* Gewinnen Sie daraus einen neuen Beweis für die Tatsache, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt (vgl. Fundamentalsatz der Algebra, Kapitel II, Satz 2.8).

(G 2)

Geben Sie einen geeigneten Definitionsbereich an, auf dem man $z \mapsto \sqrt{\log z}$ definieren kann.

(G 3)

Beweisen Sie das Lemma von Schwarz (Kapitel II, Satz 3.12):
Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Dann gilt

1. $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$ und
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Ferner gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $|f'(0)| = 1$ und genau dann, wenn $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die kein Polynom ist (man bezeichnet f auch als ganze, transzendente Funktion). Dann konvergiert die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ von f in z_0 nicht gleichmäßig auf $\mathbb{C}$.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $|f(z)| = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

(b) Wir betrachten auf $G := \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) \leq 0 , \mathrm{Im}(z) = 0 \}$ den Hauptzweig Log des Logarithmus, also den Zweig des Logarithmus, dessen Einschränkung auf die positive reelle Achse mit dem üblichen reellen Logarithmus ln übereinstimmt. In welchen Sinne gilt die Gleichung

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$$

mit $z_1 , z_2 \in G$.

(c) Wie in der Vorlesung definieren wir für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$

$$f(z) := z^\alpha := e^{\alpha \mathrm{Log}(z)} , \quad z \in G.$$

Zeigen Sie, dass $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$ für $\alpha , \beta \in \mathbb{C}$ und $z \in G$ ist. Zeigen Sie weiterhin, dass f auf G differenzierbar ist mit Ableitung $f'(z) = \alpha z^{\alpha-1}$. Berechnen Sie i^i.

(H 3) (6 Punkte)

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir nennen eine Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *reell analytisch*, falls für jedes $x \in I$ ein offenes Intervall I_x existiert auf dem sich f in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Wir nennen eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ *holomorphe Fortsetzung* von f, falls $I \subseteq G$ und $f(x) = F(x)$ für $x \in I$ gilt.
Zeigen Sie: Eine Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ besitzt genau dann eine holomorphe Fortsetzung, falls sie reell analytisch ist.

(b) Sie $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir entwickeln f in $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$. Angenommen, diese Potenzreihe konvergiert in einem z_1. Gilt dann $f(z_1) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z_1 - z_0)^n$, falls z_1 in dem Definitionsbereich D von f liegt?