Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 10./11.11.2009

Analysis III – Funktionentheorie

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

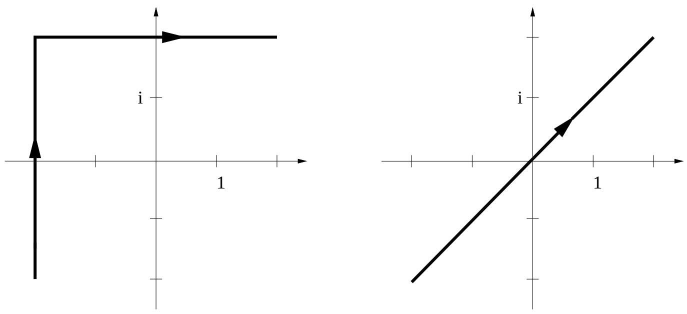
(a) Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z, \quad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{i}(t^3 - t^7)\cos(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\pi} - (t-1)^5 + (\pi - 1)t,\ t \in [0,1].$$

(b) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1 - \mathrm{i}, -1 + \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

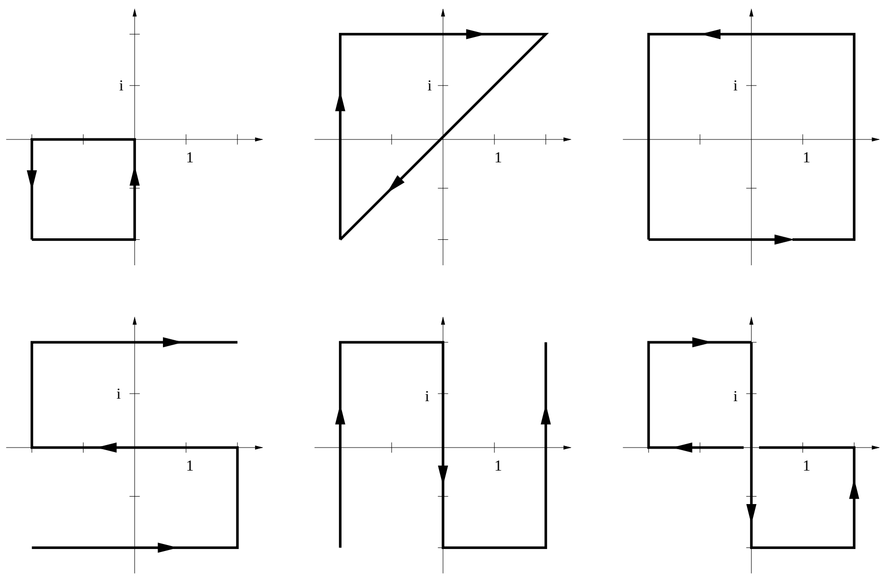
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 1, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}, \qquad \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi,$$

wobei die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 durch



γ_1 γ_2 γ_3

gegeben sind. Bestimmen Sie die Kurvenintegrale von f entlang der folgenden Wege:



Lösung: (a) Die Sinusfunktion hat auf dem konvexen Gebiet $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion, nämlich $-\cos$. Damit gilt mit Satz I.3.8

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z &= -\cos(\gamma(1)) + \cos(\gamma(0)) = -\cos(1+\pi-1) + \cos(-1-(-1)^5)\\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

(b) Wir bezeichnen die sechs Wege, für die das Kurvenintegral gesucht ist, zeilenweise mit $\gamma_a, \gamma_b, \dots, \gamma_f$. Dann gilt

$$\int_{\gamma_a} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

denn f ist holomorph auf dem konvexen Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : -3/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2,\ -3/2 < \mathrm{Im}(z) < 1/2\}$, das die Spur von γ_a enthält. Damit gilt obiges nach dem Cauchyschen Integralsatz.

Der Weg γ_b ist aus γ_1 und dem Rückweg von γ_2 zusammengesetzt. Es gilt also

$$\int_{\gamma_b} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 1 - \mathrm{i}.$$

Genauso gilt

$$\int_{\gamma_c} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi - 1.$$

Zur Bearbeitung des vierten Wegs, sei γ_4 der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten 2, $2+2\mathrm{i}$ und 0 (Damit ist auch im Folgenden immer gemeint, dass die Punkte in dieser Reihenfolge durchlaufen werden sollen und der Weg im ersten Punkt, also hier 2 beginnt und endet.) und γ_5 jener des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, $-2-2\mathrm{i}$ und -2. Dann gilt dank der Holomorphie von f außerhalb der Punkte $1-\mathrm{i}$ und $-1+\mathrm{i}$ wieder

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Außerdem ist (man beachte die Durchlaufrichtungen!):

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_d} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_d} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi - \mathrm{i} + 1.\end{aligned}$$

Für den fünften Weg findet man mit der gleichen Methode, dieses Mal unter Betrachtung der Wege γ_6 gegeben durch den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $2\mathrm{i}$, $2+2\mathrm{i}$ und 0, sowie γ_7 mit den Eckpunkten 0, $-2-2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$

$$\int_{\gamma_e} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 1 - \mathrm{i} + \pi.$$

Für den letzten Weg brauchen wir nun alle 4 Dreiecke von oben. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_f} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_f} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_7} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z - 2\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi + 1 - 2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(G 2) (Ein Nullstellenkriterium)

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ und $r > 0$ seien so, dass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ gilt. Weiter sei $f \in \mathcal{H}(D)$.

(a) Zeigen Sie in dieser Situation folgende Verschärfung von Korollar 2.6 der Vorlesung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

(b) Zeigen Sie: Gilt

$$|f(z_0)| < \min\{|f(w)| : w \in \partial B_r(z_0)\},$$

so besitzt f eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

LÖSUNG: (a) Da $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ ist, können wir die Argumentation aus dem Beweis von Korollar 2.6 einfach für r statt ϱ machen:

Nach der Cauchy-Integralformel gilt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{|z - z_0|^{n+1}} \,\mathrm{d}z \cdot \sup\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\} \\
&= \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^{n+1}} \max\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\} \\
&= \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.
\end{aligned}$$

(b) *Behauptung:* f hat mindestens eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

Beweis: Wir nehmen an, f hätte keine Nullstelle in dieser Menge. Dann hat f auch keine Nullstelle in $\overline{B_r(z_0)}$, denn in diesem Fall wäre $\min\{|f(w)| : w \in \partial B_r(z_0)\} = 0$ und damit nach Voraussetzung auch $f(z_0) = 0$, was aber nach Annahme nicht sein kann. Da f in D insbesondere stetig ist und $\overline{B_r(z_0)}$ kompakt ist, gibt es damit sogar eine Umgebung $U \subseteq D$ von $\overline{B_r(z_0)}$, in der f keine Nullstelle hat.

Damit ist die Funktion $1/f$ in U holomorph und wir können Teil (a) mit $n = 0$ auf diese Funktion anwenden. Das ergibt

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max\left\{\frac{1}{|f(z)|} : z \in \partial B_r(z_0)\right\} = \frac{1}{\min\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\}}$$

und damit

$$|f(z_0)| \geq \min\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\},$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. □

(G 3)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ habe keine Nullstelle in G. Zeigen Sie, dass dann f einen *holomorphen Logarithmus* hat, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $\mathrm{e}^g = f$.

LÖSUNG: Mit f ist auch f' in G holomorph und da f nullstellenfrei ist, ist $1/f$ und damit auch die Funktion f'/f in G holomorph. Da G konvex vorausgesetzt ist, hat nach Satz II.1.3 die Funktion f'/f auf G eine Stammfunktion. Es gibt also ein $h \in \mathcal{H}(G)$ mit $h' = f'/f$ in G.

Mit der Kettenregel gilt für jedes $z \in G$

$$\big(f(z) \cdot \mathrm{e}^{-h(z)}\big)' = f'(z)\mathrm{e}^{-h(z)} + f(z)(-h'(z))\mathrm{e}^{-h(z)} = \mathrm{e}^{-h(z)}\left(f'(z) - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

Nun ist G ein Gebiet, insbesondere also zusammenhängend. Damit folgt aus obiger Gleichheit, dass $f\mathrm{e}^{-h}$ konstant ist. Es gibt also ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z)\mathrm{e}^{-h(z)} = c$ für alle $z \in G$.

Da f und die Exponentialfunktion nullstellenfrei sind, muss insbesondere $c \neq 0$ gelten. Damit gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^a = c$, nämlich $a = \ln(|c|) + \mathrm{i}\arg(c)$. Damit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = c\mathrm{e}^{h(z)} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{h(z)} = \mathrm{e}^{a+h(z)}.$$

Wir setzen also $g(z) := a + h(z)$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(G)$ und erfüllt $f = \mathrm{e}^g$.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels der Cauchyschen Integralformeln:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1}\, dz\,,$

(b) $\displaystyle\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz\,,$

(c) $\displaystyle\int_{|z-2i|=3} \frac{f(z)}{z^2+\pi^2}\, dz\,,$

wobei $f : \{\, z \in \mathbb{C}; |z| \leq 9 \,\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Lösung: (a) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{(\frac{1}{4})}{z-1} + \frac{(-\frac{1}{4})}{z+1} + \frac{(\frac{i}{4})}{z-i} + \frac{(-\frac{i}{4})}{z+i}.$$

Wir erhalten mit der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1}\, dz = \int_{|z|=2} \frac{(\frac{1}{4})}{z-1} + \frac{(-\frac{1}{4})}{z+1} + \frac{(\frac{i}{4})}{z-i} + \frac{(-\frac{i}{4})}{z+i}\, dz = 2\pi i(\frac{1}{4} + \frac{-1}{4} + \frac{i}{4} + \frac{-i}{4}) = 0.$$

(b) Wir betrachten die Funktion $f(z) := \frac{e^z}{z}$ für $z \neq 0$. Diese Funktion hat eine Singularität in 0, die aber außerhalb des Integrationswegs $|z - \frac{3}{2}| = 1$ liegt und deshlab für die Berechnung des gefragten Kurvenintegrals keine Rolle spielt. Wir wollen die Cauchysche Integralformel für die Ableitungen anwenden. Dazu berechnen wir für $z \neq 0$

$$f'(z) = e^z \frac{z-1}{z^2}\,,$$
$$f''(z) = e^z \frac{z^2-2z+2}{z^3}.$$

Es gilt $f''(1) = e$ und somit folgt

$$\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1) = \frac{2\pi i}{2} e = \pi i e.$$

(c) Es ist $z^2 + \pi^2 = (z - \pi i)(z + \pi i)$. Man sieht, dass die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{z + \pi i}$$

in einer Umgebung von $\{\, z \in \mathbb{C}; |z - 2i| \leq 3 \,\}$ holomorph ist. Somit folgt mit der Cauchschen Integralformel

$$\int_{|z-2i|=3} \frac{f(z)}{z^2+\pi^2}\, dz = \int_{|z-2i|=3} \frac{f(z)}{(z+\pi i)(z-\pi i)}\, dz = 2\pi i \frac{f(\pi i)}{2\pi i} = f(\pi i).$$

(H 2) (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass das das Bild $f(\mathbb{C}) = \{ f(z); z \in \mathbb{C} \}$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

LÖSUNG: Wir nehmen an, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist. Wir erhalten also die Existenz einer Kugel $B_r(w) \subseteq \mathbb{C}$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$, so dass

$$f(z) \notin B_r(w) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist. Wir betrachten die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}\,, z \in \mathbb{C}.$$

Da $f(z) \notin B_r(w)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, gilt

$$|f(z) - w| \geq r \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ folgt $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. Aus dem Satz von Liouville erhaten wir, dass die Funktion g konstant ist. Es folgt, dass die Funktion f konstant ist, was zu beweisen war.

(H 3) (6 Punkte)

Zeigen Sie mittels komplexer Integralrechnung unter Verwendung des Cauchschen Integralsatzes, dass

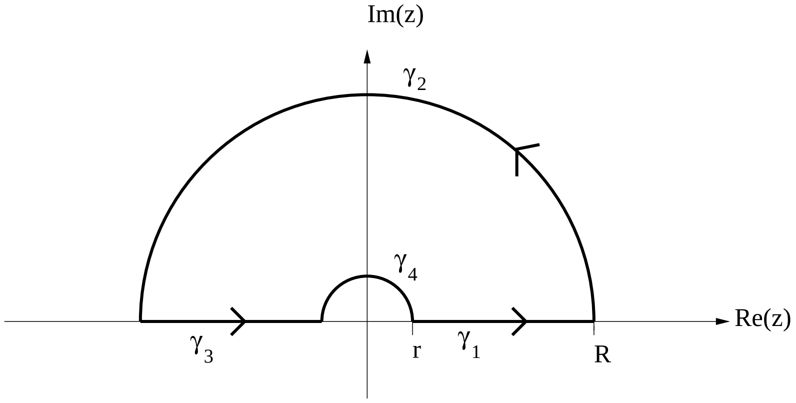
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

gilt. Die Existenz des reellen Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ wurde bereits gezeigt und darf deshalb verwendet werden.

Anleitung. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}\,, z \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$$

für $0 < r < R < \infty$ entlang der in der Skizze eingezeichneten Wege $\gamma_1\,, \gamma_2\,, \gamma_3\,, \gamma_4$.



Sie dürfen verwenden, dass der Cauchysche Integralsatz auch für allgemeinere Gebiete gilt als in der Vorlesung bis jetzt behandelt, es gilt mit $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\lim\limits_{\substack{r\to 0+\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_1+\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$

(b) $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$

(c) $\lim\limits_{r\to 0+} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -\pi i.$

Betrachten sie nun mit $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$$\lim_{\substack{r\to 0+\\ R\to\infty}} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

um die Behauptung zu erhalten.

Lösung: (a) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1+\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx \\
&= -\int_R^r \frac{e^{-ix}}{-x}\, dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx \\
&= \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx \\
&= \int_r^R 2i \frac{\sin x}{x}\, dx \to 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \text{für } r \to 0+\,, R \to \infty\,,
\end{aligned}$$

da die Existenz des reellen Integrals $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}\, dx$ bekannt ist.

(b) Es gilt aufgrund der Konkavität des Sinus

$$\sin x \leq \frac{2}{\pi} x\,, x \in [0, 2\pi].$$

Wir erhalten damit

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}\, dt = i \int_0^\pi e^{iR\cos t - R\sin t}\, dt.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \right| &\leq \int_0^\pi e^{-R\sin t}\, dt \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\, dt \\
&\leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-R2t}{\pi}}\, dt \\
&= \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \to 0 \text{ für } R \to \infty.
\end{aligned}$$

(c) Wir erhalten für $r > 0$

$$\int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -\int_0^\pi \frac{e^{i(re^{it})}}{re^{it}} ire^{it}\, dt = -i \int_0^\pi e^{ri\cos t - r\sin t}\, dt.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz

$$e^{ri\cos t - r\sin t} \to 1 \text{ auf } [0, \pi]$$

können wir in der folgenden Rechnung den Grenzwert ins Integrals ziehen:

$$\lim_{r\to 0+}\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = -i\int_0^\pi \lim_{r\to 0+} e^{ri\cos t - r\sin t}\,dt = -i\int_0^\pi 1\,dx = -\pi i.$$

(d) Für beliebige $0 < r < R < \infty$ erhalten wir mit dem Cauchschen Integralsatz

$$0 = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_3}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}\,dz. \tag{1}$$

Durch Grenzübergang $r \to 0+\,, R \to \infty$ in (1) erhält man

$$0 = 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \pi i$$

und somit die gewünschte Identität

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$