Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 10./11.11.2009

Analysis III – Funktionentheorie

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

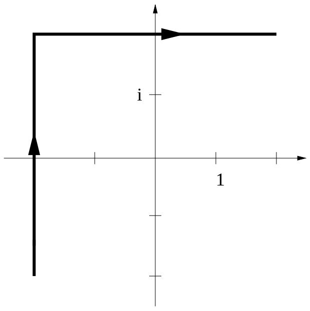
(a) Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z, \quad \text{mit } \gamma(t) = \mathrm{i}(t^3 - t^7)\cos(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\pi} - (t-1)^5 + (\pi - 1)t,\ t \in [0,1].$$

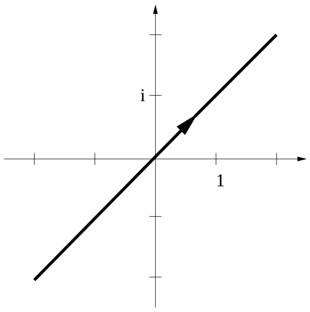
(b) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1-\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 1, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}, \qquad \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi,$$

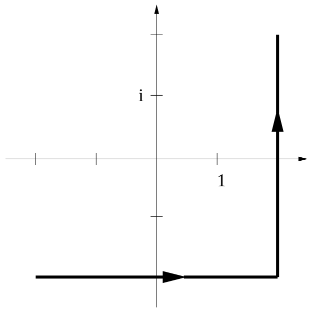
wobei die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 durch



γ_1

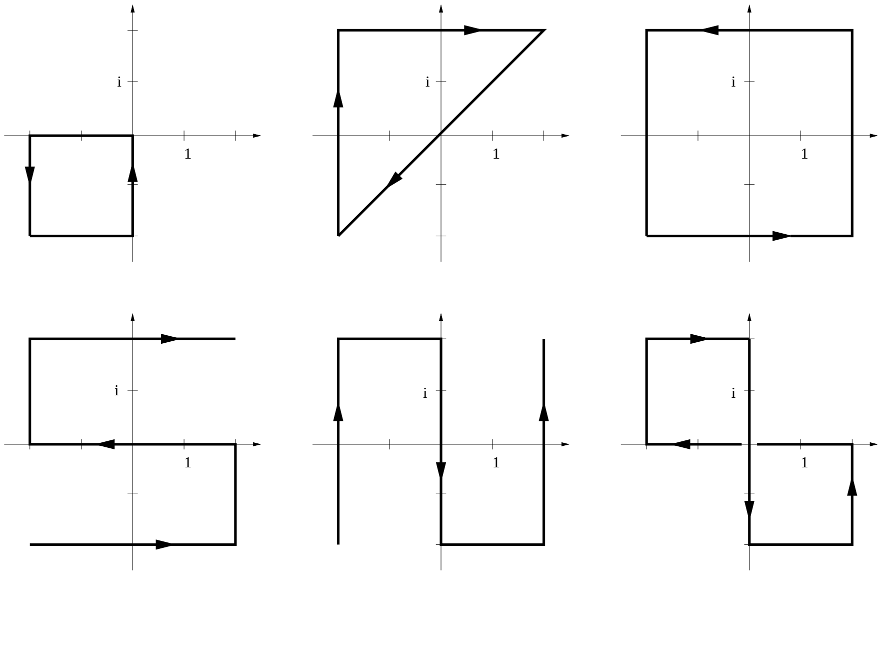


γ_2



γ_3

gegeben sind. Bestimmen Sie die Kurvenintegrale von f entlang der folgenden Wege:



(G 2) (Ein Nullstellenkriterium)

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ und $r > 0$ seien so, dass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ gilt. Weiter sei $f \in \mathcal{H}(D)$.

(a) Zeigen Sie in dieser Situation folgende Verschärfung von Korollar 2.6 der Vorlesung: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

(b) Zeigen Sie: Gilt

$$|f(z_0)| < \min\{|f(w)| : w \in \partial B_r(z_0)\},$$

so besitzt f eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

(G 3)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ habe keine Nullstelle in G. Zeigen Sie, dass dann f einen *holomorphen Logarithmus* hat, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $\mathrm{e}^g = f$.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels der Cauchyschen Integralformeln:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4 - 1}\, dz\,,$

(b) $\displaystyle\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz\,,$

(c) $\displaystyle\int_{|z-2i|=3} \frac{f(z)}{z^2 + \pi^2}\, dz\,,$

wobei $f : \{\, z \in \mathbb{C}; |z| \leq 9 \,\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(H 2) (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass das das Bild $f(\mathbb{C}) = \{\, f(z); z \in \mathbb{C} \,\}$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

(H 3) (6 Punkte)

Zeigen Sie mittels komplexer Integralrechnung unter Verwendung des Cauchschen Integralsatzes, dass

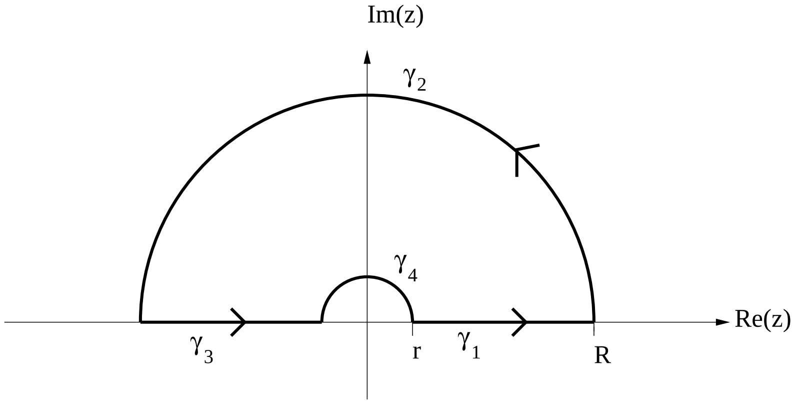
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

gilt. Die Existenz des reellen Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ wurde bereits gezeigt und darf deshalb verwendet werden.

Anleitung. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}\,, z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}$$

für $0 < r < R < \infty$ entlang der in der Skizze eingezeichneten Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.



Sie dürfen verwenden, dass der Cauchysche Integralsatz auch für allgemeinere Gebiete gilt als in der Vorlesung bis jetzt behandelt, es gilt mit $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\lim\limits_{\substack{r\to 0+\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_1+\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$

(b) $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$

(c) $\lim\limits_{r\to 0+} \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -\pi i.$

Betrachten sie nun mit $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$$\lim_{\substack{r\to 0+\\ R\to\infty}} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

um die Behauptung zu erhalten.