Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 27./28.10.2009

Analysis III – Funktionentheorie

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \mathrm{Re}(z)(z + \mathrm{Im}(z)\mathrm{i})$ und $g(z) = \mathrm{e}^{|z|}$.

(a) Untersuchen Sie f und g auf reelle Differenzierbarkeit und bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)$ und $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) In welchen Punkten sind f bzw. g komplex differenzierbar? Ist f bzw. g, gegebenenfalls nach Einschränkung auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{C}$, holomorph?

LÖSUNG: (a) Für $z = x+y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(z) = f(x+y\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(z)(z+\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}) = x(x+2y\mathrm{i}) = x^2 + 2xy\mathrm{i}$. Damit ist f reell differenzierbar und es gilt

$$f_x(z) = 2x + 2y\mathrm{i} \quad \text{und} \quad f_y(z) = 2x\mathrm{i} \quad \text{für alle } z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\big(f_x(z) - f_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}(2x + 2y\mathrm{i} + 2x) = 2x + y\mathrm{i} = z + \mathrm{Re}(z) \quad \text{und}\\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\big(f_x(z) + f_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}(2x + 2y\mathrm{i} - 2x) = y\mathrm{i} = \mathrm{Im}(z)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Für g erhalten wir entsprechend $g(z) = g(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$. Damit ist g in allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ reell differenzierbar mit

$$g_x(z) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x \quad \text{und} \quad g_y(z) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y.$$

Das führt für $z \neq 0$ auf

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{1}{2}\big(g_x(z) - g_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{|z|}}{|z|}(x - y\mathrm{i})\right) = \frac{\mathrm{e}^{|z|}\overline{z}}{2|z|} \quad \text{und}\\ \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\big(g_x(z) + g_y(z)\mathrm{i}\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{|z|}}{|z|}(x + y\mathrm{i})\right) = \frac{\mathrm{e}^{|z|}z}{2|z|}.\end{aligned}$$

(b) Nach Satz 2.2 ist f in z_0 komplex differenzierbar, genau dann wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ gilt, d.h. genau dann wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ist.

Damit ist f nach den Ergebnissen aus (a) genau dann in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn $\mathrm{Im}(z) = 0$, also wenn $z \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion g ist hingegen in keinem $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar, denn $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$ ist für kein $z \neq 0$ Null.

Trotzdem ist f in keiner Weise holomorph, denn man spricht von einer holomorphen Funktion nur dann, wenn sie auf einer *offenen* Teilmenge von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist (vgl. die Definition von Holomorphie) und es gibt keine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die in der reellen Achse enthalten ist.

(G 2)

(a) Es sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{it}$ gegeben. Berechnen Sie für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z$.

(b) Auf welchen offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{C}$ hat die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ eine Stammfunktion?

LÖSUNG: (a) Es gilt

$$\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n \mathrm{e}^{int} (\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}})^m r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} \mathrm{e}^{int} \mathrm{e}^{-imt} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \mathrm{i}r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m+1)t} \, \mathrm{d}t.$$

Ist nun $n - m = -1$, so erhalten wir mit $n = m - 1$

$$\mathrm{i}r^{2m} \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi r^{2m} \mathrm{i},$$

in allen anderen Fällen gilt

$$\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z = \mathrm{i}r^{n+m+1} \frac{1}{\mathrm{i}(n-m+1)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Zusammengenommen gilt also

$$\int_\gamma z^n \overline{z}^m \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi r^{2m}\mathrm{i}, & \text{falls } n = m - 1, \\ 0, & \text{falls } n \neq m - 1. \end{cases}$$

(b) *Behauptung:* Auf keiner offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ hat $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ eine Stammfunktion.

Beweis: Wir nehmen an, die Funktion hätte auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Stammfunktion F mit $F(z) = u(z) + v(z)\mathrm{i}$ und $u, v : D \to \mathbb{R}$. Dann muss $F'(z) = \mathrm{Re}(z)$ für alle $z \in D$ gelten. Das impliziert mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für alle $z = x + y\mathrm{i} \in D$

$$v_y(z) = u_x(z) = \mathrm{Re}(F'(z)) = \mathrm{Re}(z) = x \quad \text{und} \quad -u_y(z) = v_x(z) = \mathrm{Im}(F') = 0.$$

Das bedeutet insbesondere, dass u und v zwei Mal stetig reell differenzierbar sind und es gilt für die zweiten Ableitungen von v nach dem Satz von Schwarz

$$1 = v_{yx}(z) = v_{xy}(z) = 0,$$

womit wir einen Widerspruch haben.

Alternativer Beweis: Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Dann gibt es einen Kreis $B_{2r}(z_0) \subseteq D$ mit einem $r > 0$. Wir betrachten den geschlossenen Integrationsweg $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt $\gamma([0, 2\pi]) \subseteq B_{2r}(z_0) \subseteq D$ und

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathrm{Re}(z) \, \mathrm{d}z &= \frac{1}{2} \int_\gamma (z + \overline{z}) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(z_0 + r\mathrm{e}^{it} + \overline{z_0} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Re}(z_0) r\mathrm{i} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} r^2 \mathrm{i} \int_0^{2\pi} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + 1) \, \mathrm{d}t = 0 + 0 + \frac{1}{2} r^2 \mathrm{i} \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t \\ &= r^2 \pi \mathrm{i} \neq 0. \end{aligned}$$

Also kann $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ keine Stammfunktion auf D haben.

(G 3)

Es sei γ_1, γ_2 zwei Integrationswege, die durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen und $f : \mathrm{Spur}(\gamma_1) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt $\int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z$, wobei $\varepsilon = 1$ für eine orientierungserhaltende und $\varepsilon = -1$ für eine orientierungsumkehrende Parametertransformation gilt.

LÖSUNG: Es seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ und $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ sei die Parametertransformation, die γ_1 in γ_2 überführt, d.h. es gilt $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Weiter sei $a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b_1$ eine Zerlegung des Intervalls $[a_1, b_1]$ derart, dass $\gamma_1|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ stetig differenzierbar ist. Dann gilt nach der Kettenregel selbiges auch für γ_2 auf den Intervallen $[\varphi^{-1}(t_j), \varphi^{-1}(t_{j+1})]$ im Falle einer orientierungserhaltenden Transformation, bzw. den Intervallen $[\varphi^{-1}(t_{j+1}), \varphi^{-1}(t_j)]$ für eine orientierungsumkehrende Transformation.

Nun bekommen wir mit der Substitution $t = \varphi(s)$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f\big((\gamma_1 \circ \varphi)(s)\big)\gamma_1'\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f(\gamma_2(s))(\gamma_1 \circ \varphi)'(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das folgenden Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_i} |z|\,dz\,,$$

für $i = 1, 2$, wobei γ_1 die Gerade zwischen $-i$ und $+i$ ist und γ_2 der einfach durchlaufene, positiv orientierte Weg auf dem Einheitskreis von $-i$ nach $+i$ ist. Ist $z \mapsto |z|$ in $B_2(0) := \{\, z \in \mathbb{C}; |z| < 2 \,\}$ holomorph?

(b) Für beliebiges $z_1\,, z_2 \in \mathbb{C}$ sei γ die Verbindungsstrecke zwischen z_1 und z_2. Berechnen Sie, wann immer dies sinnvoll ist, das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2}\,dz.$$

LÖSUNG: (a) Eine mögliche Parametrisierung von γ_1 ist gegeben durch $\gamma_1(t) := ti\,, t \in [-1, 1]$. Wir erhalten

$$\int_{\gamma_1} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |ti|i\,dt = i\int_{-1}^{1} |t|\,dt = i.$$

Als Parametrisierung von γ_2 kann man $\gamma_2(t) := e^{ti}$ mit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wählen. Es gilt

$$\int_{\gamma_2} |z|\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |e^{ti}|ie^{ti}\,dt = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ti}\,dt = e^{ti}\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2i$$

Da das Kurvernintegral über z in $B_2(0)$ somit nicht wegunabhängig ist, kann somit die Funktion $z \mapsto |z|$ nicht holomorph in $B_2(0)$ sein.

(b) Wir berechnen zunächst eine reelle Stammfunktion:

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u+4)^2}\,du = \frac{-1}{2(u+4)} = \frac{-1}{2(x^2+4)}.$$

Durch einfaches Ableiten sieht man, dass $f(z) := \frac{-1}{2(z^2+4)}$ für $z \neq \{\,-2i, 2i\,\}$ eine komplexe Stammfunktion von $\frac{z}{(z^2+4)^2}$ ist. Somit erhalten wir für alle Wege γ, die z_1 mit z_2 verbinden und auf denen nicht $-2i$ oder $+2i$ liegt

$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2}\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Falls $-2i$ oder $2i$ auf dem Weg γ liegt, ist das Kurvenintegral nicht definiert.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Sei $f : G \subseteq \mathbb{C}$ eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, deren Realteil $\mathrm{Re}(f)$ auf G konstant ist. Zeigen Sie, dass f dann ebenfalls konstant auf G sein muss.

(b) Untersuchen Sie die folgenden, auf ganz $\mathbb{C}$ definierten Funktionen auf Holomorphie und auf komplexe Differenzierbarkeit.

(i) $f(z) := \mathrm{Im}(z)\,,$

(ii) $f(z) := z\mathrm{Re}(z).$

Lösung: (a) Falls $\mathrm{Re}(f)$ konstant ist, folgt sofort $u_x(z) = 0$ und $u_y(z) = 0$ für alle $z \in G$. Mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt $v_x(z) = v_y(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$. Da G ein Gebiet ist, können wir schließen, dass u und v konstant auf G sind.

(i) Für beliebige $z\,, h \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\frac{\mathrm{Im}(z+h) - \mathrm{Im}(z)}{h} = \frac{\mathrm{Im}(h)}{h}$$

Wir wählen nun eine Folge reelle Folge $h_n \to 0\,, h_n \neq 0$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Im}(ih_n)}{ih_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{i} = -i$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Im}(ih_n)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Damit ist $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ nirgends komplex differentierbar und somit auch nirgends holomorph.

(ii) Mittels der üblichen Identifizierung ist $u(x, y) = x^2$ und $v(x, y) = xy$. Man sieht, dass das System der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad -u_y(x, y) = v_x(x, y)$$

nur in $(x, y)^T = (0, 0)^T$ erfüllt sind. Damit ist $z \mapsto z\mathrm{Re}(z)$ nur in $z = 0$ komplex differentierbar. Da Holomorphie als komplexe Differenzierbarkeit in offenen Mengen erklärt ist, ist $z \mapsto z\mathrm{Re}(z)$ nirgends holomorph.

(H 3) (6 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz. (Lokale Invertierbarkeit holomorpher Funktionen) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq D$ von z_0 und V von $w_0 := f(z_0)$ derart, dass $f(U) = V$ ist und $f|_U$ injektiv ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ von $f|_U$ ist in V holomorph und es gilt*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \textit{für alle } w \in V.$$

Hinweis. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Identifizieren Sie f mittels $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, F = (\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))^T$. Zeigen Sie $\det F'(z_0) \neq 0$ und wenden Sie den Satz über die lokale Invertierbarkeit von reel differenzierbaren Funktionen an. Es gilt $(F^{-1})'(w) = (F'(F^{-1}(w))^{-1}$ für alle w aus einer geeignete Umgebung von w_0. Beenden Sie nun den Beweis.

LÖSUNG: Wir identifizieren $z = x + yi \in \mathbb{C}$ mittels $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ und f mit der Funktion $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (\mathrm{Re} f(x + yi), \mathrm{Im} f(x + yi))^T$. Es gilt

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Es folgt mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\det F'(x,y) = u_x(x,y)v_y(x,y) - u_y(x,y)v_x(x,y) = u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y).$$

Da $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0)i \neq 0$ folgt daraus $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$. Somit können wir den Satz über die lokale Invertierbarkeit reell differentierbarer Funktionen anwenden und finden somit Umgebungen U von z_0 und V von $f(z_0)$, so dass $F : U \to V$ bijektiv ist und

$$(F^{-1})'(w) = (F'(F^{-1}(w))^{-1} \quad \forall w \in V$$

gilt. Wir erhalten durch Inversion der Matrix für $w \in V$

$$(F^{-1})'(w) = \begin{pmatrix} u_x(F^{-1}(w)) & u_y(F^{-1}(w)) \\ v_x(F^{-1}(w)) & v_y(F^{-1}(w)) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{u_x^2(F^{-1}(w)) + u_y^2(F^{-1}(w))} \begin{pmatrix} v_y(F^{-1}(w)) & -u_y(F^{-1}(w)) \\ -v_x(F^{-1}(w)) & u_x(F^{-1}(w)). \end{pmatrix}$$

Sei $F^{-1}(w)) = \tilde{u}(w) + \tilde{v}(w)i$ für $w \in V$. Unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(w) &= \tilde{v}_y(w) \\ -\tilde{v}_x(w) &= \tilde{u}_y(w) \end{aligned}$$

für alle $w \in V$. Damit ist f^{-1} in V holomorph und man erhält für beliebiges $w \in V$

$$(f^{-1})'(w) = \tilde{u}_x(f^{-1}(w)) + \tilde{v}_x(f^{-1}(w)) = \frac{u_x(f^{-1}(w)) - v_x(f^{-1}(w))}{u_x^2(f^{-1}(w)) + v_x^2(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f(w)}.$$