Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 27./28.10.2009

Analysis III – Funktionentheorie

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \mathrm{Re}(z)(z + \mathrm{Im}(z)\mathrm{i})$ und $g(z) = \mathrm{e}^{|z|}$.

(a) Untersuchen Sie f und g auf reelle Differenzierbarkeit und bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)$ und $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) In welchen Punkten sind f bzw. g komplex differenzierbar? Ist f bzw. g, gegebenenfalls nach Einschränkung auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{C}$, holomorph?

(G 2)

(a) Es sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{it}$ gegeben. Berechnen Sie für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma z^n \overline{z}^m \,\mathrm{d}z$.

(b) Auf welchen offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{C}$ hat die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ eine Stammfunktion?

(G 3)

Es sei γ_1, γ_2 zwei Integrationswege, die durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen und $f : \mathrm{Spur}(\gamma_1) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, wobei $\varepsilon = 1$ für eine orientierungserhaltende und $\varepsilon = -1$ für eine orientierungsumkehrende Parametertransformation gilt.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das folgenden Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_i} |z|\, dz\,,$$

für $i = 1, 2$, wobei γ_1 die Gerade zwischen $-i$ und $+i$ ist und γ_2 der einfach durchlaufene, positiv orientierte Weg auf dem Einheitskreis von $-i$ nach $+i$ ist. Ist $z \mapsto |z|$ in $B_2(0) := \{\, z \in \mathbb{C}; |z| < 2 \,\}$ holomorph?

(b) Für beliebiges $z_1\,, z_2 \in \mathbb{C}$ sei γ die Verbindungsstrecke zwischen z_1 und z_2. Berechnen Sie, wann immer dies sinnvoll ist, das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2}\, dz.$$

(H 2) (6 Punkte)

(a) Sei $f : G \subseteq \mathbb{C}$ eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, deren Realteil $\mathrm{Re}(f)$ auf G konstant ist. Zeigen Sie, dass f dann ebenfalls konstant auf G sein muss.

(b) Untersuchen Sie die folgenden, auf ganz $\mathbb{C}$ definierten Funktionen auf Holomorphie und auf komplexe Differenzierbarkeit.

(i) $f(z) := \mathrm{Im}(z)$,

(ii) $f(z) := z\mathrm{Re}(z)$.

(H 3) (6 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz. (Lokale Invertierbarkeit holomorpher Funktionen) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq D$ von z_0 und V von $w_0 := f(z_0)$ derart, dass $f(U) = V$ ist und $f|_U$ injektiv ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ von $f|_U$ ist in V holomorph und es gilt*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \text{für alle } w \in V.$$

Hinweis. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Identifizieren Sie f mittels $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))^T$. Zeigen Sie $\det F'(z_0) \neq 0$ und wenden Sie den Satz über die lokale Invertierbarkeit von reel differenzierbaren Funktionen an. Es gilt $(F^{-1})'(w) = (F'(F^{-1}(w))^{-1}$ für alle w aus einer geeignete Umgebung von w_0. Beenden Sie nun den Beweis.