Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
Dr. Horst Heck
Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 13./14.10.2009

Analysis III – Funktionentheorie

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{i) } z = \overline{\frac{2+5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}}, \qquad \text{ii) } z = (1+\mathrm{i})^{8n+3}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{iii) } z = \sum_{k=0}^{101} (3\mathrm{i})^k, \qquad \text{iv) } z = \operatorname{Re}\big(2e^{\mathrm{i}\pi/3}\big).$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{C}$:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^n \qquad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^{n!}, \qquad \text{iii) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k.$$

LÖSUNG: (a) (i) $z = \overline{\frac{2+5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}} = \frac{(2-5\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \frac{1}{5}(2-4\mathrm{i}-5\mathrm{i}-10) = -\frac{8}{5} - \frac{9}{5}\mathrm{i}.$

(ii) Mit Hilfe der Polardarstellung komplexer Zahlen erhalten wir

$$\begin{aligned} z = (1+\mathrm{i})^{8n+3} &= \big(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4}\big)^{8n+3} = \sqrt{2}^{8n+3} e^{\mathrm{i}(8n+3)\pi/4} = \sqrt{2}^{8n+3} e^{\mathrm{i}2n\pi} e^{\mathrm{i}3\pi/4} \\ &= \sqrt{2}^{8n+3} e^{\mathrm{i}3\pi/4} = 2^{4n+1}\big(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}3\pi/4}\big) = 2^{4n+1}(-1+\mathrm{i}) = -2^{4n+1} + 2^{4n+1}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(iii) Die endliche geometrische Summe liefert

$$\begin{aligned} z = \sum_{k=0}^{101} (3\mathrm{i})^k &= \frac{1-(3\mathrm{i})^{102}}{1-3\mathrm{i}} = \frac{1 - 3^{102} \cdot \mathrm{i}^{25\cdot 4+2}}{1-3\mathrm{i}} = \frac{(1-3^{102}\cdot(-1))(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} \\ &= \frac{1+3\mathrm{i}+3^{102}+3^{103}\mathrm{i}}{10} = \frac{1+3^{102}}{10} + \frac{3+3^{103}}{10}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(iv) $z = \operatorname{Re}\big(2e^{\mathrm{i}\pi/3}\big) = 2\operatorname{Re}\big(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)\big) = 2\cos(\pi/3) = 1.$

(b) (i) Es gilt

$$\left|\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right| = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{25+1}} = \sqrt{\frac{10}{13}} < 1.$$

Also konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}})^n$, woraus folgt, dass die untersuchte Folge eine Nullfolge ist.

(ii) $(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$ ist eine achte Einheitswurzel. Da jede Zahl $n!$ für $n \geq 4$ durch acht teilbar ist, gilt

$$\big((1+\mathrm{i})/\sqrt{2}\big)^{n!} = 1 \quad \text{für alle } n \geq 4.$$

Der gesuchte Grenzwert ist also 1.

(iii) Es ist $|(1+\mathrm{i})/2| = 1/\sqrt{2} < 1$, also konvergiert die untersuchte geometrische Reihe und nach der Formel für diese haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1+\mathrm{i}}{2}} - 1 = \frac{2}{2-(1+\mathrm{i})} - 1 = \frac{2}{1-\mathrm{i}} - 1 = \frac{2+2\mathrm{i}}{2} - 1 = \mathrm{i}.$$

(G 2)

(a) Für welche Punkte auf dem Rand ihres Konvergenzkreises konvergieren bzw. divergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n?$$

Geben Sie weiter eine Potenzreihe an, die auf dem Rand des Konvergenzkreises sowohl divergentes als auch konvergentes Verhalten aufweist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := z\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$$

injektiv ist.

LÖSUNG: (a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1,$$

d.h. der Konvergenzradius der beiden Reihen ist nach der Formel von Cauchy-Hadamard jeweils 1. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gegeben. Dann gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

was eine konvergente Majorante ist. Also ist die erste Potenzreihe auf dem gesamten Rand des Konvergenzkreises konvergent.

Im Falle der zweiten Potenzreihe beobachten wir, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ die summierte Folge konstant Betrag eins hat, insbesondere also keine Nullfolge sein kann. Damit konvergiert die zweite Potenzreihe an keinem Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises.

Betrachten wir schließlich die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, so hat diese ebenfalls Konvergenzradius eins (wie oben), und diese divergiert für $z = 1$ (harmonische Reihe) und konvergiert für $z = -1$ (alternierende harmonische Reihe).

(b) Mit Hilfe der geometrischen Reihe gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$f(z) = z\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Seien nun $v, w \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ gegeben. Dann gilt dank $v \neq 1$ und $w \neq 1$

$$\begin{aligned} f(v) = f(w) \iff \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{w}{(1-w)^2} &\iff v(1-2w+w^2) = w(1-2v+v^2) \\ \iff v + vw^2 = w + wv^2 &\iff v - w = vw(v-w). \end{aligned}$$

Also ist dann entweder $v = w$ oder $vw = 1$. Dieser zweite Fall kann aber nicht eintreten, denn wegen $|v| < 1$ und $|w| < 1$ muss natürlich auch $|vw| < 1$ sein. Also ist $v = w$ und damit f injektiv.

(G 3)

(a) Geben Sie Wege $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ an, die jeweils die einmal positiv durchlaufene Einheitskreislinie als Spur haben.

(b) Weiter betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$. Geben Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ an, das dieser Funktion entspricht, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert, d.h. mit $F(x, y) = \big(\mathrm{Re}(f(x + y\mathrm{i})),\ \mathrm{Im}(f(x + y\mathrm{i}))\big)^T$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}.$$

LÖSUNG: (a) $\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad$ und $\quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$

tun das gewünschte.

(b) Es gilt für $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{i}.$$

Wir setzen also

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)^T.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\ \mathrm{dx} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)}, \frac{-\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \right)^T \cdot \big(-\sin(t),\ \cos(t)\big)^T \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-2)\sin(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = \cos^2(t)\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 - \mathrm{Re} z \}$,

(ii) $\{ z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \}$.

(b) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^6 + 1 = 0.$$

LÖSUNG: (a) (i) Wir betrachten $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$|z| < 1 - \mathrm{Re} z \quad \iff \sqrt{x^2 + y^2} < 1 - x.$$

Wir können somit $x < 1$ annehmen. Mittels einer einfachen Rechnung erhalten wir für $x < 1$ und $y \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 - x \iff y^2 < 1 - 2x.$$

Damit folgt

$$\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 - \mathrm{Re} z \} = \{ z = x + yi;\ y^2 < 1 - 2x \}.$$

Dies entspricht der Menge aller Punkte $(x, y)^T$ im $\mathbb{R}^2$, die von der $x-$Achse und der Parabel $y^2 = 1 - 2x$ eingeschlossen werden.

(ii) Betrachte $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$. Wir erhalten

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2} \iff \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \iff$$
$$x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \iff (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Es folgt $\{ z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2} \} = \{ z = x + yi; y \neq 0, (x - 1)^2 + y^2 = 1 \}$. Diese Menge ist der Kreis um $(1, 0)$ mit Radius 1 ohne den Punkt $(0, 0)^T$.

(b) Wir machen den Ansatz $z = re^{\phi i}$ mit $r \geq 0$ und $\phi \in [0, 2\pi[$. Damit muss wegen $e^{\pi i} = -1$ gelten

$$r^6 e^{6\phi i} = e^{\pi i}.$$

Es folgt sofort $r = 1$. Weiterhin erhalten wir die Bedingung

$$6\phi i = k\pi i + 2k\pi i \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten die sechs verschieden Lösungen $e^{(\frac{k\pi i}{3} + \frac{\pi i}{6})}$ mit $k = 0, \ldots, 5$.

(H 2) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2 + k}{2k^2 + 1} \right)^k z^k,$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k.$

(b) Es sei $\rho \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\, z^{2k}$.

Lösung: (a) Wir berechnen den Konvergenzradius mit der Formel von Cauchy-Hadamard: Es gilt

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{3k^2 + k}{2k^2 + 1} \right)^k} = \limsup_{k \to \infty} \left(\frac{3k^2 + k}{2k^2 + 1} \right) = \frac{3}{2}.$$

Damit erhalten wir $\rho = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

(b) Sei $a_k := \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{((k + 1)!)^2 (2k)!}{(k!)^2 (2(k + 1))!} = \lim_{k \to \infty} \frac{(k + 1)^2 (k!)^2 (2k)!}{(k!)^2 (2k + 2)(2k + 1)(2k)!}$$
$$= \lim_{k \to \infty} \frac{(k + 1)^2}{(2k + 2)(2k + 1)} = \frac{k + 1}{2(k + 1)} \frac{k + 1}{2k + 1} = \frac{1}{4}.$$

Damit erhalten wir für den Konvergenzradius $\rho = 4$.

(c) Wir betrachten zunächst die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 z^k$. Es gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k^2} = \limsup k \to \infty \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)^2 = \left(\limsup k \to \infty \sqrt[k]{|a_k|}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Damit besitzt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 z^k$ den Konvergenzradiustenz ρ^2. Nun betrachten wir die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 (z^k)^2$. Diese konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z^2| < \rho^2$ und divergiert für alle komplexen z mit $|z^2| > \rho^2$. Also ist der Konvergenzradius der in der Aufgabenstellung gegeben Potenzreihe ρ.

(H 3) (6 Punkte)

Es sei γ der Weg, der sich aus dem durch $\gamma_1(t) = (t^2, t)^T$, $t \in [0, \pi]$, parametrisierten Weg und dem Geradenstück von (π^2, π) nach (π^2, π^2) zusammensetzt. Weiter betrachten wir das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (\sin x, y^3)^T$.

(a) Parametrisieren und skizzieren Sie γ.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}.$$

(c) Geben Sie eine komplexe Parametrisierung des selben Weges (gesehen als Funktion nach $\mathbb{C}$) an.

Lösung: (a) Wir erhalten als Parametrisierung

$$\gamma(t) := \begin{cases} (t^2, t) & , t \in [0, \pi] \\ (\pi^2, t) & , t \in [\pi, \pi^2]. \end{cases}$$

(b) Wir erhalten mit den üblichen Rechenregeln für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} &= \int_{\pi}^{\pi^2} (\sin(t^2), t^3) \cdot (0, 1)\, dt \\ &= \int_{\pi}^{\pi^2} t^3\, dt \\ &= \frac{1}{4} t^4 \Big|_{\pi}^{\pi^2} = \frac{1}{4}(\pi^8 - \pi^4). \end{aligned}$$

(c) Eine komplexe Parametrisierung ist gegeben durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} t^2 + ti & , t \in [0, \pi] \\ \pi^2 + ti & , t \in [\pi, \pi^2]. \end{cases}$$