Fachbereich Mathematik
PD Dr. Robert Haller-Dintelmann
Dr. Horst Heck
Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 13./14.10.2009

Analysis III – Funktionentheorie

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{i) } z = \overline{\frac{2+5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}}, \qquad \text{ii) } z = (1+\mathrm{i})^{8n+3}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{iii) } z = \sum_{k=0}^{101} (3\mathrm{i})^k, \qquad \text{iv) } z = \mathrm{Re}\big(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\big).$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{C}$:

$$\text{i) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4-2\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^n \qquad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^{n!}, \qquad \text{iii) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^k.$$

(G 2)

(a) Für welche Punkte auf dem Rand ihres Konvergenzkreises konvergieren bzw. divergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n?$$

Geben Sie weiter eine Potenzreihe an, die auf dem Rand des Konvergenzkreises sowohl divergentes als auch konvergentes Verhalten aufweist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$$

injektiv ist.

(G 3)

(a) Geben Sie Wege $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ an, die jeweils die einmal positiv durchlaufene Einheitskreislinie als Spur haben.

(b) Weiter betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$. Geben Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ an, das dieser Funktion entspricht, wenn man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert, d.h. mit $F(x,y) = \big(\mathrm{Re}(f(x+y\mathrm{i})),\ \mathrm{Im}(f(x+y\mathrm{i}))\big)^T$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_2} F(\mathrm{x})\, \mathrm{dx}.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $\{ z \in \mathbb{C}; |z| < 1 - \mathrm{Re} z \}$,

(ii) $\{ z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \}$.

(b) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^6 + 1 = 0.$$

(H 2) (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2 + k}{2k^2 + 1} \right)^k z^k$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$.

(b) Es sei $\rho \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \, z^{2k}$.

(H 3) (6 Punkte)

Es sei γ der Weg, der sich aus dem durch $\gamma_1(t) = (t^2, t)^T$, $t \in [0, \pi]$, parametrisierten Weg und dem Geradenstück von (π^2, π) nach (π^2, π^2) zusammensetzt. Weiter betrachten wir das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (\sin x, y^3)^T$.

(a) Parametrisieren und skizzieren Sie γ.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_2} F(\mathrm{x}) \, \mathrm{dx}.$$

(c) Geben Sie eine komplexe Parametrisierung des selben Weges (gesehen als Funktion nach $\mathbb{C}$) an.