Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 02./03.02.2010

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1^3 \mathrm{e}^{y_2} \\ y_2' &= -y_1^4 \mathrm{e}^{y_2} - 2y_2 \mathrm{e}^{y_2^2} \end{aligned}$$

Untersuchen Sie die Stabilität der Nulllösung.

LÖSUNG: Mit $V(y_1, y_2) = y_1^4 \mathrm{e}^{y_2} + \mathrm{e}^{y_2^2}$ kann die gegebene DGL als Gradientensystem $y' = -\nabla V$ geschrieben werden. Der Punkt $(0,0)$ ist isolierter kritischer Punkt dieser Gleichung. Wegen $V(\varepsilon, \eta) = \varepsilon^4 \mathrm{e}^{\eta} + \mathrm{e}^{\eta^2} > 1 = V(0,0)$ ist der Nullpunkt ein isoliertes Minimum. Wählen wir also V als Ljapunovfunktion, so folgt nach Beispiel 2.4 f) die asymptotische Stabilität der Nulllösung.

(G 2) (Lorenz-System)

Das *Lorenz-System* (vgl. Vorlesung bzw. Skript Kapitel IV) ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& c_1(y(t) - x(t)), \\ y'(t) &=& c_2 x(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ z'(t) &=& x(t)y(t) - c_3 z(t), \end{array} \right. \tag{1}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für $0 < c_2 < 1$ ist die Nulllösung von (1) asymptotisch stabil.

(ii) Für $c_2 > 1$ ist die Nulllösung von (1) instabil.

Was lässt sich im Fall $c_2 = 1$ aussagen?

Hinweis: Um Aussage (i) zu beweisen, benutzen Sie, wie im Skript Kapitel IV angegeben, die Ljapunov-Funktion $L(x, y, z) := x^2 + c_1 y^2 + c_1 z^2$.

LÖSUNG: Wir schreiben $f(x, y, z) := (c_1(y - x), c_2 x - y - xz, xy - c_3 z)^{\mathrm{T}}$. Für die angegebene Funktion L gilt offenbar

$$L(0,0,0) = 0 \quad \text{und} \quad L(x, y, z) > 0 \quad \text{für alle } x, y, z \neq 0.$$

Außerdem gilt

$$\dot{L}(x, y, z) = \langle \nabla L(x, y, z) | f(x, y, z) \rangle = -2c_1 x^2 - 2c_1 y^2 - 2c_1 c_3 z^2 + 2c_1 xy(1 + c_2).$$

Für $0 < c_2 < 1$ gilt $\dot{L}(x, y, z) < 0$ für alle $x, y, z \neq 0$, d.h. die Funktion L ist eine strikte Ljapunov-Funktion von (1). Die Aussage (i) folgt nun aus Kapitel IV, Theorem 2.2.

Um Aussage (ii) zu beweisen, berechnen wir zunächst die Eigenwerte von

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gerade durch $p(\lambda) = -(c_3 + \lambda)(\lambda^2 + (c_1 + 1)\lambda + c_1 - c_1 c_2)$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man somit

$$\lambda_1 = -c_3 \quad \text{und} \quad \lambda_{2/3} = -\frac{c_1 + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1 + 1)^2}{4} - c_1 + c_1 c_2}.$$

Im Fall $c_2 > 1$ sieht man, dass ein Eigenwert positiv ist und Aussage (ii) folgt somit nun aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3).

Für $c_2 = 1$ gilt

$$\dot{L}(x, y, z) = \langle \nabla L(x, y, z) | f(x, y, z) \rangle = -2c_1 x^2 - 2c_1 y^2 - 2c_1 c_3 z^2 + 4c_1 xy = -2c_1(x + y)^2 - 2c_3 z^2.$$

In diesem Fall ist also L immer noch eine Ljapunov-Funktion, allerdings nicht mehr strikt. Aus Kapitel IV, Theorem 2.2 folgt nun, dass die Nulllösung in diesem Fall stabil ist.

(G 3)

Gegeben seien die folgenden beiden Differentialgleichungssysteme:

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)y^2(t) + x^2(t)y(t) + x^3(t), \\ y'(t) & = & -x^3(t) + y^3(t), \end{array} \right. \qquad \text{(ii)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -2x(t)y(t), \\ y'(t) & = & x^2(t) - y^3(t). \end{array} \right.$$

Bestimmen Sie jeweils das Stabilitätsverhalten der Nulllösung. Betrachten Sie dazu Funktionen der Form $L(x, y) := ax^2 + by^2$, wobei a, b Konstanten sind, die noch gewählt werden müssen.

Lösung: Wir betrachten hier die Funktion $L(x, y) := Ax^2 + By^2$ als mögliche Ljapunov-Funktion. Es gilt $L(0, 0) = (0, 0)$ und für $A, B > 0$ gilt $L(x, y) > (0, 0)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$.

Wir beginnen mit System (i): Wir schreiben $f(x, y) := (xy^2 + x^2 y + x^3, -x^3 + y^3)^{\mathrm{T}}$ und erhalten

$$\dot{L}(x, y, z) = \langle \nabla L(x, y) | f(x, y) \rangle = 2Ax^2 y^2 + 2Ax^3 y + 2Ax^4 - 2Byx^3 + 2By^4.$$

Wählen wir z.B. $A = B = 1$ so erhalten wir $\dot{L}(x, y, z) = 2x^2 y^2 + 2x^4 + 2y^4 > 0$ für alle $(x, y) \neq 0$. Nach Kapitel IV, Theorem 2.3 ist die Nullösung somit instabil.

Kommen wir nun zu System (ii): Wir schreiben $g(x, y) := (-xy, x^2 - y^3)^{\mathrm{T}}$ und erhalten

$$\dot{L}(x, y, z) = \langle \nabla L(x, y) | g(x, y) \rangle = -4Ax^2 y + 2Byx^2 - 2By^4.$$

Wählen wir z.B. $B = 2A$ so erhalten wir $\dot{L}(x, y, z) = -2By^4 \leq 0$ für alle $(x, y) \neq 0$, d.h. L ist eine Ljapunov-Funktion, allerdings keine strikte Ljapunov-Funktion. Nach Kapitel IV, Theorem 2.2 ist die Nullösung somit stabil.