**Fachbereich Mathematik**
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 19./20.01.2010

# Analysis III
# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 6. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 1) (Mathematisches Pendel mit Reibung)**

Im Skript, Kapitel IV wird die Gleichung des mathematischen Pendels ohne Reibung diskutiert. Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$u''(t) + \varepsilon u'(t) + \sin u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$ gilt.

(a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System 1. Ordnung $v'(t) = f(v(t))$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems $v'(t) = f(v(t))$.

(c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte.

Lösung: (a) Wir setzen $v = (u, u')^{\mathrm{T}}$ und $f(x, y) = (y, -\varepsilon y - \sin x)^{\mathrm{T}}$. Das zugehörige System 1. Ordnung lautet nun

$$v'(t) = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ -\varepsilon u' - \sin u \end{pmatrix} = f(v).$$

(b) Die kritischen Punkte von $f$, d.h. die Punkte $(x, y)$ mit $f(x, y) = 0$, sind $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Es gilt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

sowie

$$Df(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \text{für } k \text{ gerade}, \quad \text{und} \quad Df(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \text{für } k \text{ ungerade}.$$

Wir bestimmen zunächst das Stabiltätsverhalten der kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für $k$ gerade: Das charakteristische Polynom von $Df(k\pi, 0)$ ist durch $p_1(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 4}{4}}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.
*Fall 1:* $\varepsilon < 2$.
In diesem Fall ist $\varepsilon^2 - 4 < 0$, d.h. $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} \in i\mathbb{R}$ . Also gilt $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die kritischen Punkte

$(k\pi, 0)$ für $k$ gerade asymptotisch stabil.
*Fall 2:* $\varepsilon \geq 2$.
In diesem Fall ist $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} \in \mathbb{R}$ und es gilt $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Die beiden Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind reell und negativ. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für $k$ gerade asymptotisch stabil.

Nun bestimmen wir das Stabiltätsverhalten der kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für $k$ ungerade: Das charakteristische Polynom von $Df(k\pi, 0)$ ist durch $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda - 1$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2+4}{4}}.$$

Es gilt $\sqrt{\frac{\varepsilon^2+4}{4}} > \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Somit liegt jewils ein positiver und ein negativer Eigenwert vor. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die Punkte $(k\pi, 0)$ für $k$ ungerade instabil.

## (G 2)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0, \quad t \geq 0,$ (ii) $y'''(t) - 2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0, \quad t \geq 0.$

LÖSUNG: (i) Das charakteristische Polynom ist $A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Es hat $\lambda_1 = 2$ als Nullstelle mit Vielfachheit 2. Nach Kapitel III, Satz 5.3 bilden

$$\phi_1(t) = \mathrm{e}^{2t}, \qquad \phi_2(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$$

ein Fundamentalsystem.

(ii) Hier ist $A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$. Daher sind die Nullstellen von $A(\lambda)$ gegeben durch

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Somit ist

$$\phi_1(t) = \mathrm{e}^{t}, \qquad \phi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \qquad \phi_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda_3 t}$$

ein Fundamentalsystem. Um ein reelles Fundamentalsystem zu bestimmen, definiere

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &:= \phi_1(t) \\
\psi_2(t) &:= \frac{1}{2}(\phi_2(t) + \phi_3(t)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t + i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t - i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\
\psi_3(t) &:= \frac{1}{2}(\phi_2(t) - \phi_3(t)) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und $\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$, ist auch $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ ein Fundamentalsystem.

## (G 3)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Aus der Stabiltät der Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ folgt im Allgemeinen nicht die Attraktivität der Nulllösung.

(b) Ist die Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ attraktiv, so ist sie stets auch stabil, damit also asymptotisch stabil.

*Bemerkung:* Im Allgmeinen folgt aus der Attraktivität einer Lösung nicht die Stabilität der Lösung.

LÖSUNG: (a) Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $A$ sind $\pm i$. Das Phasenpotrait des Systems $y' = Ay$ ist ein Wirbel/Zentrum. Man erkennt sofort, dass die Nulllösung stabil, aber nicht attraktiv ist.

(b) Wir nehmen an, die Nulllösung ist attraktiv, d.h. nach der Definition (Kapitel III, Definition 4.6) existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Lösungen $u(t) = e^{tA}x_0$ von

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

mit $|x_0| < \delta$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \lim_{t\to\infty} |e^{tA}x_0| = 0.$$

Insbesondere können wir also $x_0 = \frac{\delta}{2} \cdot e_i$ setzen, wobei $e_i$ den $i$-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, und wir erhalten

$$\frac{\delta}{2} \lim_{t\to\infty} |e^{tA}(e_i)| = 0,$$

d.h. die Norm der $n$-Spalten von $e^{tA}$ konvergieren alle gegen 0 für $t \to \infty$. Also folgt insbesondere, $\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}\| = 0$, d.h. die Matrixnorm von $e^{tA}$ geht gegen 0 für $t \to \infty$. Diese Beobachtung zusammen mit der Stetigkeit von $t \mapsto e^{tA}$ garantieren nun die Existenz einer Konstante $M$, so dass $\|e^{tA}\| \le M$ für alle $t \ge 0$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Um die Stabilität der Nulllösung zu beweisen, muss gezeigt werden, dass ein $\tilde{\delta} > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen $z(t) = e^{tA}w_0$ von

$$\begin{cases} w'(t) &= Aw(t), \\ w(0) &= w_0, \end{cases}$$

mit $|w_0| < \tilde{\delta}$ gilt:

$$|z(t)| = |e^{tA}w_0| \le \varepsilon \qquad t > 0.$$

Setzen wir nun $\tilde{\delta} = \frac{\varepsilon}{M}$, dann erhalten wir

$$|e^{tA}w_0| \le \|e^{tA}\||w_0| \le M|w_0| \le \varepsilon$$

für alle $|w_0| < \tilde{\delta}$ und somit haben wir die Stabilität der Nulllösung gezeigt.

## Hausübungen

### (H 1)

(a) Untersuchen Sie die kritischen Punkte der Differentialgleichung

$$y'(t) = (y(t) - 1)(y(t) - 2)(y(t) - 3)$$

auf ihr Stabilitätsverhalten.

(b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(4)} - 6y''' + 15y'' - 20y' + 12y = 0$$

LÖSUNG: (a) Wir wenden Theorem 1.3 im Skript an und erhalten für die kritischen Punkte, d.h. $f(y_i) = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$ und

$f'(1) = 2$, $f'(2) = -1$, $f'(3) = 2$,

da $y' = f(y) = y^3 - 6y^2 + 11y - 6$, also $f'(y) = 3y^2 - 12y + 11$.

Das heißt, $y_1$ ist instabil, $y_2$ ist asymptotisch stabil und $y_3$ ist instabil.

(b) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 6\lambda^3 + 15\lambda^2 - 20\lambda + 12 &= \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4\lambda^2 - 8\lambda + 12 \\ &= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - (1 + \sqrt{2}\mathrm{i}))(\lambda - (1 - \sqrt{2}\mathrm{i}))\end{aligned}$$

Damit ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$\{\mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^t \sin(\sqrt{2}t), \mathrm{e}^t \cos(\sqrt{2}t)\}$$

## (H 2)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) + \arctan(y_2(t)) \\ y_2(t)' &= -3y_2(t) + 4y_3(t) - y_3(t)y_2(t)^2 \\ y_3(t)' &= \frac{1}{2}y_2(t) - \sin(y_3(t))\end{aligned}$$

(a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = 0$ eindeutig lösbar ist und geben Sie die Losung an.

(b) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

LÖSUNG: (a) Das System ist von der Form $y' = f(y)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Damit ist $f$ lokal Lipschitz-stetig und daher ist das AWP eindeutig lösbar. Offensichtlich ist die Nulllösung $y \equiv 0$ diese Lösung.

(b) Wir verwenden das Prinzip der linearisierten Stabilität, das wegen $f \in C^1$ mit $f(0) = 0$ anwendbar ist. Weiter gilt

$$Df(y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 + \frac{1}{1+y^2} & 2 \\ 0 & -3 - 2y_2y_3 & 4 - y_2^2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\cos(y_3) \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\{-1, -2\pm\sqrt{3}\}$. Die Nulllösung ist also asymptotisch stabil.

## (H 3)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte des Systems

$$\begin{aligned}x' &= \sin(x + y) \\ y' &= \mathrm{e}^x - 1\end{aligned}$$

Entscheiden Sie weiter, welche stabil und welche instabil sind.

LÖSUNG: Für die kritischen Punkte gilt $x = 0$ und $y = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Zur Stabilitätsuntersuchung setzen wir $u = x$ und $v = y - n\pi$. Dies liefert $u' = \sin(u + v + n\pi)$ und $v' = \mathrm{e}^u - 1$. Weiter gilt $\sin(u + v + n\pi) = \cos(n\pi)\sin(u + v) = (-1)^n \sin(u + v)$.

Taylor-Entwicklung von sin und exp ergibt das System

$$W' = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W + \text{ Terme mit Ordnung } > 2$$

mit $W = (u,v)^T$. Daher lässt sich das Prinzip der linearisierten Stabilität anwenden. Es sind also die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diese sind $\lambda_{1/2} = \frac{(-1)^n \pm \sqrt{1+4(-1)^n}}{2}$. Also $\lambda_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, falls $n$ gerade und $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. Damit folgt, dass $x \equiv 0$, $y \equiv n\pi$ ist instabil, falls $n$ gerade und asymptotishc stabil, falls $n$ ungerade.