Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10 19./20.01.2010

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen
6. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Mathematisches Pendel mit Reibung)

Im Skript, Kapitel IV wird die Gleichung des mathematischen Pendels ohne Reibung diskutiert. Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$u''(t) + \varepsilon u'(t) + \sin u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$ gilt.

(a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System 1. Ordnung $v'(t) = f(v(t))$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems $v'(t) = f(v(t))$.

(c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte.

(G 2)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0, \quad t \geq 0,$ (ii) $y'''(t) - 2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0, \quad t \geq 0.$

(G 3)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Aus der Stabiltät der Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ folgt im Allgemeinen nicht die Attraktivität der Nulllösung.

(b) Ist die Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ attraktiv, so ist sie stets auch stabil, damit also asymptotisch stabil.

Bemerkung: Im Allgmeinen folgt aus der Attraktivität einer Lösung nicht die Stabilität der Lösung.

Hausübungen

(H 1)

(a) Untersuchen Sie die kritischen Punkte der Differentialgleichung

$$y'(t) = (y(t) - 1)(y(t) - 2)(y(t) - 3)$$

auf ihr Stabilitätsverhalten.

(b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(4)} - 6y''' + 15y'' - 20y' + 12y = 0$$

(H 2)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) + \arctan(y_2(t)) \\ y_2(t)' &= -3y_2(t) + 4y_3(t) - y_3(t)y_2(t)^2 \\ y_3(t)' &= \frac{1}{2}y_2(t) - \sin(y_3(t)) \end{aligned}$$

(a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = 0$ eindeutig lösbar ist und geben Sie die Losung an.

(b) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

(H 3)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte des Systems

$$\begin{aligned} x' &= \sin(x + y) \\ y' &= \mathrm{e}^x - 1 \end{aligned}$$

Entscheiden Sie weiter, welche stabil und welche instabil sind.