Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 15./16.12.2008

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten)

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungssysteme:

1. $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_2(t), \\ y_3'(t) &= 2y_3(t), \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) - y_2(t), \\ y_2'(t) &= 4y_1(t) - 3y_2(t). \end{aligned}$$

(b) Ist die Nulllösung jeweils (asymptotisch) stabil?

Lösung: (a) Wir schreiben die beiden Differentialgleichungssysteme in der Form $y'(t) = Ay(t)$, wobei A die entsprechende 3×3 bzw. 2×2 Matrix ist. Nach Kapitel III, Theorem 3.3 bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem. Somit muss in beiden Fällen gerade die Exponential-Matrix e^{tA} bestimmt werden.

1. In diesem Fall ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da A bereits in Jordan-Normalform vorliegt, kann man e^{tA} wie im Skript beschrieben berechnen und erhält

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2. Hier ist nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist $\det(A - \lambda Id) = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2$ und somit ist $\lambda_1 = -1$ der einzige Eigenwert. Als zugehörigen Eigenvektor kann man z.B. $v_1 = (1,2)^{\mathrm{T}}$ wählen. Den Hauptvektor v_2 berechnen wir als Lösung der Gleichung $(A + Id)v_2 = v_1$ und erhalten z.B. $v_2 = (1,1)^{\mathrm{T}}$. Mit der Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir nun

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix-Exponentialfunktion lässt sich nun leicht berechnen:

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

Es reicht auch aus

$$e^{tA}S = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 2 & 1+2t \end{pmatrix}$$

zu berechnen, da dies ebenfalls ein Fundamentalsystem bildet.

(G 2) (Phasenbild)

Skizzieren Sie das Phasenbild des Systems aus Aufgabe (G 1)(a)2.

LÖSUNG:

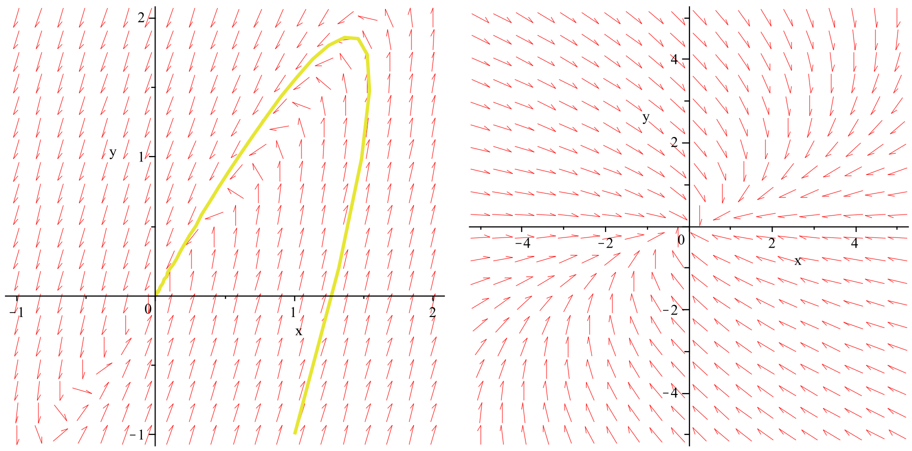

Abbildung 1: Links: Phasenbild, rechts: Phasenbild zur Jordanform

(G 3) (Operatorhalbgruppen im $\mathbb{R}^n$)

Eine stetige Abbildung $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für die

1. $T(0) = Id$ und
2. $T(s+t) = T(s) \cdot T(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$

gilt, wird stetige Operatorhalbgruppe genannt. Zeigen Sie, dass für jede stetige Operatorhalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein eindeutig bestimmtes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$T(t) = e^{tA} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Zeigen Sie, dass $\int_0^\varepsilon T(s)ds$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ invertierbar ist. Zeigen Sie hierfür, dass $(Id - B)$ für $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|B\| < 1$ stets invertierbar ist mit der Inversen $\sum_{k=0}^\infty B^k$.

(ii) Betrachten Sie $\frac{T(h)-Id}{h} \int_0^\varepsilon T(t)dt$, um die Differenzierbarkeit von T in 0 zu zeigen.

(iii) Zeigen Sie, dass T differenzierbar ist und eine geeignete Differentialgleichung erfüllt.

LÖSUNG: Zunächst bemerken wir, dass, falls $\|B\| < 1$ ist, folgt, dass die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ absolut konvergent ist mit $(Id - B)\sum_{k=0}^{\infty} B^k = Id$ (Teleskopsumme).
Da T stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|T(t) - T(0)\| < \delta < 1$, falls $|t - 0| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\|Id - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds\| = \|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s) - T(0)ds\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \|T(s) - T(0)\|ds < \delta < 1.$$

Somit ist $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds$ und auch $\int_0^{\varepsilon} T(s)ds$ invertierbar. Wir setzen

$$\psi(h) := \int_0^{\varepsilon} T(s+h)ds.$$

Wegen

$$\psi(h) = \int_0^{h+\varepsilon} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds$$

ist ψ differenzierbar (Hauptsatz d. Diff.- und Integralrechnung) mit

$$\frac{T(h) - T(0)}{h}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds = \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \psi'(0).$$

Somit ist auch $T(t) = \psi(t)\left(\int_0^{\varepsilon} T(s)ds\right)$ in 0 differenzierbar. Es gilt

$$\frac{T(h+t) - T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h) - T(0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} T(t)T'(0).$$

Also ist T überall differenzierbar mit $T'(t) = T(t)T'(0)$. Nun ist wegen Satz 4.3. die Funktion $\Phi : t \mapsto e^{tT'(0)}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t)T'(0),$$

und weil die Abbildung $y \mapsto yT'(0)$ auf ganz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz stetig ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = Id$

$$T(t) = e^{tT'(0)} = e^{tA}.$$

Wegen $A = T'(0)$ ist diese Matrix eindeutig bestimmt.