Fachbereich Mathematik
PD Dr. R. Haller-Dintelmann
PD Dr. Horst Heck
Dipl.-Math. Christian Komo

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 15./16.12.2008

Analysis III
Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten)

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungssysteme:

1. $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_2(t), \\ y_3'(t) &= 2y_3(t), \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) - y_2(t), \\ y_2'(t) &= 4y_1(t) - 3y_2(t). \end{aligned}$$

(b) Ist die Nulllösung jeweils (asymptotisch) stabil?

Lösung: (a) Wir schreiben die beiden Differentialgleichungssysteme in der Form $y'(t) = Ay(t)$, wobei A die entsprechende 3×3 bzw. 2×2 Matrix ist. Nach Kapitel III, Theorem 3.3 bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem. Somit muss in beiden Fällen gerade die Exponential-Matrix e^{tA} bestimmt werden.

1. In diesem Fall ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da A bereits in Jordan-Normalform vorliegt, kann man e^{tA} wie im Skript beschrieben berechnen und erhält

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2. Hier ist nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist $\det(A - \lambda Id) = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2$ und somit ist $\lambda_1 = -1$ der einzige Eigenwert. Als zugehörigen Eigenvektor kann man z.B. $v_1 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$ wählen. Den Hauptvektor v_2 berechnen wir als Lösung der Gleichung $(A + Id)v_2 = v_1$ und erhalten z.B. $v_2 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$. Mit der Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir nun

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix-Exponentialfunktion lässt sich nun leicht berechnen:

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

Es reicht auch aus

$$e^{tA}S = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 2 & 1+2t \end{pmatrix}$$

zu berechnen, da dies ebenfalls ein Fundamentalsystem bildet.

(G 2) (Phasenbild)

Skizzieren Sie das Phasenbild des Systems aus Aufgabe (G 1)(a)2.

LÖSUNG:

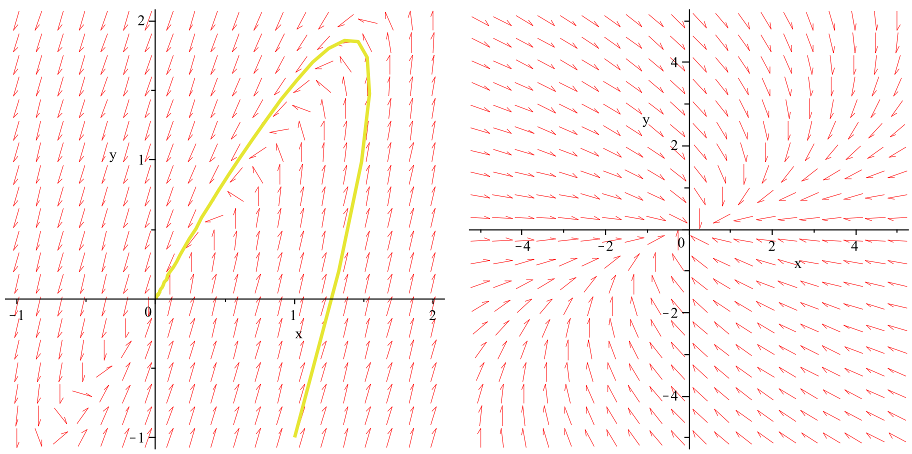

Abbildung 1: Links: Phasenbild, rechts: Phasenbild zur Jordanform

(G 3) (Operatorhalbgruppen im $\mathbb{R}^n$)

Eine stetige Abbildung $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für die

1. $T(0) = Id$ und
2. $T(s+t) = T(s) \cdot T(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$

gilt, wird stetige Operatorhalbgruppe genannt. Zeigen Sie, dass für jede stetige Operatorhalbgruppe $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein eindeutig bestimmtes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit

$$T(t) = e^{tA} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

(i) Zeigen Sie, dass $\int_0^\varepsilon T(s)ds$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ invertierbar ist. Zeigen Sie hierfür, dass $(Id - B)$ für $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|B\| < 1$ stets invertierbar ist mit der Inversen $\sum_{k=0}^\infty B^k$.

(ii) Betrachten Sie $\frac{T(h)-Id}{h} \int_0^\varepsilon T(t)dt$, um die Differenzierbarkeit von T in 0 zu zeigen.

(iii) Zeigen Sie, dass T differenzierbar ist und eine geeignete Differentialgleichung erfüllt.

LÖSUNG: Zunächst bemerken wir, dass, falls $\|B\| < 1$ ist, folgt, dass die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ absolut konvergent ist mit $(Id - B)\sum_{k=0}^{\infty} B^k = Id$ (Teleskopsumme).
Da T stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|T(t) - T(0)\| < \delta < 1$, falls $|t - 0| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\|Id - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds\| = \|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s) - T(0)ds\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \|T(s) - T(0)\|ds < \delta < 1.$$

Somit ist $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds$ und auch $\int_0^{\varepsilon} T(s)ds$ invertierbar. Wir setzen

$$\psi(h) := \int_0^{\varepsilon} T(s+h)ds.$$

Wegen

$$\psi(h) = \int_0^{h+\varepsilon} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds$$

ist ψ differenzierbar (Hauptsatz d. Diff.- und Integralrechnung) mit

$$\frac{T(h) - T(0)}{h}\int_0^{\varepsilon} T(s)ds = \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \psi'(0).$$

Somit ist auch $T(t) = \psi(t)\left(\int_0^{\varepsilon} T(s)ds\right)$ in 0 differenzierbar. Es gilt

$$\frac{T(h+t) - T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h) - T(0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(t)T'(0).$$

Also ist T überall differenzierbar mit $T'(t) = T(t)T'(0)$. Nun ist wegen Satz 4.3. die Funktion $\Phi : t \mapsto e^{tT'(0)}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t)T'(0),$$

und weil die Abbildung $y \mapsto yT'(0)$ auf ganz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz stetig ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung mit dem Anfangswert $y(0) = Id$

$$T(t) = e^{tT'(0)} = e^{tA}.$$

Wegen $A = T'(0)$ ist diese Matrix eindeutig bestimmt.

Hausübungen

(H 1) (Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zu dem folgenden System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= x + 2z \\ z' &= -2x + y - z \end{aligned}$$

LÖSUNG: Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich das System auffassen als $((x,y,z)^T)' = A(x,y,z)^T$. Ein Fundamentalsystem ist - bis auf Linearkombinationen - gegeben durch e^{tA}. Um dies zu berechnen, versuchen wir, A zu diagonalisieren. Wir berechnen die Eigenwerte wieder mit dem charakteristischen Polynom.

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(1+\lambda)\lambda + 6 - 4\lambda - 2(2-\lambda) + (-1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i) \end{aligned}$$

Es sind die Eigenräume zu den jeweiligen Eigenwerten zu berechnen. Für λ_1 ist das System

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Man erhält $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als möglichen Eigenvektor. Analog erhält man zum Eigenwert $\lambda_2 = i$ den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ und zum Eigenwert $\lambda_3 = -i$ den Eigenvektor $\begin{pmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten somit

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = C^{-1}AC$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1-i & i-1 \\ 2 & -1-i & i-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir ein Fundamentalsystem durch

$$\begin{aligned} e^{tA}C &= CC^{-1}e^{tA}C = Ce^{tC^{-1}AC} = Ce^{tJ} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1-i & i-1 \\ 2 & -1-i & i-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(1+i)e^{it} & (i-1)e^{-it} \\ 2e^t & -(1+i)e^{it} & (i-1)e^{-it} \\ e^t & e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachte: Die Multiplikation von rechts mit C erspart die explizite Berechnung von C^{-1}.

(H 2)

Entscheiden Sie, ob die Lösungen $y_0 \equiv 0$ und $y_1 \equiv 1$ der Differentialgleichung $y' = -y(1-y)$ stabil oder instabil sind.

LÖSUNG: Durch Trennung der Veränderlichen erhält man, falls $0 < y(0) < 1$

$$y(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{t+c}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

und

$$y(t) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{t+c}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

in den Fällen $y(0) \neq 0$ und $y(0) \neq 1$ als allgemeine Lösung der DGl.

Stabilität für $y \equiv 0$:

Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{t+c}} = 0$$

für alle $c > 0$ und

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{t+c}} = 0$$

für alle $c \in \mathbb{R}$. Damit folgt, dass y_0 attraktiv ist. Da obige Konvergenz monoton ist, folgt auch die asymptotische Stabilität von y_0.

Beh: y_1 ist instabil.

Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für t groß genug

$$\frac{1}{2} \leq |1 - \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{t+c}}| \leq 1.$$

Das heißt, y_1 ist instabil. (Wähle etwa $\varepsilon < \frac{1}{2}$)

(H 3)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, so dass $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt. Zeigen Sie: Es gibt Untervektorräume U_s und U_i von $\mathbb{C}^n$ mit $U_s \oplus U_i = \mathbb{C}^n$, so dass $\mathrm{e}^{tA} x_s \to 0$ für $t \to \infty$, falls $x_s \in U_s$ und $\|\mathrm{e}^{tA} x_i\| \to \infty$, falls $x_i \in U_i \setminus \{0\}$ gilt.

(*) (Zusatzaufgabe ohne Wertung) Zeigen Sie, dass $\{A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) : \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ist.

LÖSUNG: Wir setzen $\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ und $\sigma_i(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$. Weiter bezeichne $\Lambda_s = \{x_1, \ldots, x_m\}$ die Menge der Jordan-Basisvektoren zu den Eigenwerten aus $\sigma_s(A)$ und $\Lambda_i = \{y_1, \ldots, y_k\}$ die Menge der Jordan-Basisvektoren zu den Eigenwerten aus $\sigma_i(A)$. Wir setzen dann $U_s = \mathrm{span}\ \Lambda_s$ und $U_i = \mathrm{span}\ \Lambda_i$. Dann gilt $\mathbb{C}^n = U_s \oplus U_i$. Für $x \in U_s$ folgt

$$\mathrm{e}^{tA} x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i t^{k_i} \mathrm{e}^{\lambda_i t} x_i \to 0 \quad (t \to \infty)$$

da $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ und für $y \in U_i \setminus \{0\}$ folgt analog $\|\mathrm{e}^{At} y\| \to \infty$ für $t \to \infty$.